GRA FIK

Mitteilung 05 | 7 Dezember 2009

Etwas zu Kurventheorie und zu Quadriken

Zu Beginn des Kurses hatte ich das Buch von Michael Bender & Manfred Brill, *Computergrafik* aus dem Hanser Verlag empfohlen. Nicht ohne Einschränkung, denn es enthält eine Fülle von oft auch mathematischen Gegebenheiten (was gut ist), die nicht immer verständlich eingeführt werden (schlecht). Manchmal fallen sie direkt vom Himmel (wie z.B. auf Seite 13 das Skalarprodukt zweier Vektoren in eigener Bezeichnung). Das Schlagwortverzeichnis ist, wie bei deutschen Büchern üblich, schwach bis sehr schwach.

Dennoch: wer ergänzend zu den Aspekten liest, die wir im Kurs auf unterschiedlichen Wegen berühren, und wer regelmäßig und genau liest, wird daraus einen guten Gewinn für das Studium der Computergrafik ziehen können. (Das gilt aber auch für andere Bücher.)

Quadriken

„Quadriken" nennt man allgemein die Flächen zweiter Ordnung. Sie hießen so, weil ihre implizite Darstellung durch eine Gleichung zweiten Grades in den Raumkoordinaten x, y, z gewonnen wird.

Die allgemeine quadratische Form in drei Variablen lautet

$$q(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Dx + Ey^2 + 2Fyz + 2Gy + Hz^2 + 2Iz + J.$$

Dass darin die gemischten und linearen Glieder mit dem Faktor 2 notiert werden, hat keine Bedeutung. Es ist eine oft gebrauchte Konvention, die sich als günstig erweist. Wir werden sofort sehen, dass sie zu einer gewissen Vereinfachung Anlass gibt. Homogenisieren wir nun die Koordinaten $(x\ y\ z)$ zu $(x\ y\ z\ w)$, so schreibt sich die quadratische Form

$$q(x, y, z, w) = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Dxw + Ey^2 + 2Fyz + 2Gyw + Hz^2 + 2Izw + Jw^2.$$

Jedes Glied ist jetzt quadratisch in den vier Koordinaten.

Aus den zehn Koeffizienten $A, B, ..., J$ bilden wir die symmetrische Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & E & F & G \\ C & F & H & I \\ D & G & I & J \end{pmatrix}$$

Frieder Nake: OAS Gebäude Linzer Str. 9a Raum 3015 | (0421) 218-3525 | nake@informatik.uni-bremen.de
Sprechzeit: Mittwoch 12-14 | www.agis.informatik.uni-bremen.de

In ihr stehen die Koeffizienten der vier reinen Quadrate – also A, E, H, J – in der Hauptdiagonalen. Die der gemischten Quadrate erscheinen im oberen und unteren Dreieck je einmal, gespiegelt an der Hauptdiagonalen.

Die Gleichung

$$\Phi(x,y,z,w) \quad = \quad (x\ y\ z\ w)\cdot Q\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \quad = \quad 0$$

stellt nun eine Fläche dar, die man „Quadrik" nennt. Ihre genaue Analyse ist erschöpfend bekannt. Z.B. ergibt die Wahl von $B = C = D = F = G = I = 0$ und $A = E = H = 1, J = -1$ die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$$

(mit Mittelpunkt $(0\ 0\ 0)$ und Radius w).

Verschwinden die Glieder außerhalb der Hauptdiagonalen und ist

$$A = \frac{1}{a^2},\ E = \frac{1}{b^2},\ H = \frac{1}{c^2},\ J = -1,$$

so ergibt sich das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - w^2 = 0.$$

Mit der Wahl $A = \frac{1}{a^2}, E = \frac{1}{b^2}, H = -1, J = -1$ erhalten wir das elliptische Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 - w^2 = 0$$

(Seine Schnitte mit Ebenen parallel zur xy-Ebene sind Ellipsen; die ebenen Schnitte parallel zur xy-Ebene ergeben Hyperbeln.) In guten Formelsammlungen findet Ihr andere spezielle Flächen. Frage: ist die Ebene enthalten?

Aus den Anfängen der Kurventheorie

Eine Kurve hatten wir eingeführt als das „topologische Bild" eines eindimensionalen Intervalls, also etwa

$$P : [0,1] \to \Re_3$$

(Statt des Parameterintervalls $[0,1]$ können wir jedes andere $[a,b]$ nehmen.) Dieser einfache Begriff ist bereits ausreichend, um Punktmengen zu definieren, die viele der Eigenschaften besitzen, die wir intuitiv mit dem Begriff „Kurve" verbinden (welche sind das?).

Bezeichnen wir, wie üblich, den Parameter des linearen Intervalls $[0,1]$ mit t, so erhalten wir in

$$P(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

die Koordinaten der Punkte der Kurve (jeder Wert von *t* liefert einen Punkt). Leiten wir nach t ab (die vektorielle Funktion *P* muss dafür mindestens zweimal differenzierbar sein), so erhalten wir die Vektoren

$$\dot{P}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \ddot{P}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Darin steht etwa $\dot{x}(t)$ für $\dfrac{dx(t)}{dt}$ usw. Mit $P(t)$ beschreiben wir die Punkte einer Kurve im Raum, mit $\dot{P}(t)$ die Richtung der Tangente an die Kurve in einem ihrer Punkte. (Die Schreibweise der Ableitung mit Punkten hat sich irgendwann eingebürgert.)

Kurven werden mit einer gewissen Geschwindigkeit durchlaufen, sie weisen eine Krümmung und eine Torsion auf. Weiter können wir von einem ersten, fest gewählten Punkt aus die Länge bis zu einem beliebigen ihrer Punkte messen. Sie wird „Bogenlänge" genannt. Diese Größen sind kennzeichnend für die Geometrie und damit für die Erscheinung der Kurve.

Der Betrag der Ableitung gibt das Bogenelement beim Parameter t:

$$\left|\dot{P}(t)\right| = \sqrt{\dot{P}(t) * \dot{P}(t)} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

Integrieren wir das, so erhalten wir die Bogenlänge:

$$s(t) = \int_0^t \left|\dot{P}(\tau\right| d\tau \qquad (t \in [0,1])$$

Transformieren wir den Parameter t auf die Bogenlänge s, so ergibt sich eine Kurvendarstellung, die besonders günstig für viele analytische Aufgaben ist. Ich will das an zwei einfachen Beispielen demonstrieren: an der Ellipse und der Schraubenlinie. Ihre Gleichungen lauten

$$E(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad t \in [0,\ 2\pi]$$

Diese Ellipse liegt in der xy-Ebene, hat ihren Mittelpunkt im Ursprung und besitzt die Hauptachsen a und b. Die Schraubenlinie („Helix") ist gegeben durch

$$H(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ h\,t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad t \in [0, n\pi] \qquad (n \geq 1)$$

Die Schraubenlinie in dieser Form windet sich um die z-Achse und beginnt im Punkt $(r\ \ 0\ \ 0)$. Sie führt $n/2$ volle Drehungen aus.

Die Ableitungen dieser Kurven sind

$$\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \\ 0 \end{pmatrix},\quad \ddot{E}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \\ 0 \end{pmatrix},\quad \dot{H}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix},\quad \ddot{H}(t) = \begin{pmatrix} -r\cos t \\ -r\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Bogenelemente sind:

$$\left|\dot{E}(t)\right\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,, \quad \left|\dot{H}(t)\right| = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Also ist die Bogenlänge jeweils

$$s(t) = \int_o^t \sqrt{a^2\sin^2\tau + b^2\cos^2\tau}\,d\tau\,, \quad s(t) = \int_o^t \sqrt{r^2 + h^2}\,d\tau = \sqrt{r^2 + h^2}\,t$$

Das Integral können wir im Fall der Ellipse zwar mit $\cos^2\tau = 1 - \sin^2\tau$ ein wenig umformen. Es lässt sich dennoch nicht geschlossen lösen (elliptisches Integral 2. Gattung!).

Transformation des Parameters t auf die Bogenlänge s ist im Falle der Schraubenlinie einfach:

$$s(t) = \sqrt{r^2 + h^2}\cdot t \qquad \text{oder} \qquad t(s) = s/\sqrt{r^2 + h^2}$$

also

$$H(s) = \begin{pmatrix} r\cos(s/\sqrt{r^2 + h^2}) \\ r\sin(s/\sqrt{r^2 + h^2}) \\ h/\sqrt{r^2 + h^2}\,s \end{pmatrix} \qquad s \in \left[0, \sqrt{r^2 + h^2}\; n\pi\right]$$

Leiten wir H nach s ab, so ergibt sich

$$H'(s) = \begin{pmatrix} -r/\sqrt{r^2 + h^2}\,\sin(s/\sqrt{r^2 + h^2}) \\ r/\sqrt{r^2 + h^2}\,\cos(s/\sqrt{r^2 + h^2}) \\ h/\sqrt{r^2 + h^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H''(s) = \begin{pmatrix} -r/(r^2 + h^2)\cos(s/\sqrt{r^2 + h^2} \\ -r/(r^2 + h^2)\sin(s/\sqrt{r^2 + h^2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen wir nun das Bogenelement, so erhalten wir

$$\| H'(s) \| = \sqrt{(r^2 + h^2)/\left(r^2 + h^2\right)} = 1$$

Das gilt allgemein immer dann, wenn die Parameterform einer Kurve auf die Bogenlänge umgestellt ist. Wir sehen hieran die besondere Bedeutung der Bogenlänge.

Mit einer Raumkurve werden in jedem ihrer Punkte drei Vektoren gegeben, die das sog. Dreibein von Frenet bilden. Die Vektoren sind der Tangentenvektor T, der Normalenvektor N und der Binormalenvektor B. (Achtung: normalerweise werden sie mit Kleinbuchstaben notiert. Ich nehme hier ausnahmsweise große Buchstaben, um Verwechslungen mit dem Kurvenparameter t zu vermeiden.) Sie hängen selbstverständlich vom Parameter (t oder s) ab. In der Reihenfolge (T, N, B) bilden die Vektoren ein Rechtssystem. Es gilt

$$T(s) = P'(s)$$
$$B(s) = P'(s) \times P''(s)$$
$$N(s) = B(s) \times T(s)$$

Wenn die drei Vektoren in der Bogenlänge dargestellt werden, sind sie normiert (haben Längen 1).

Die beiden charakterisierenden Eigenschaften einer Kurve sind nun

Krümmung	$\kappa(s) = \lvert T'(s)\rvert = \lvert P''(s)\rvert$
Krümmungsradius	$\zeta(s) = 1/\kappa(s)$
Windung (Torsion)	$\tau(s) = \lvert B'(s)\rvert$

Mit Krümmung und Torsion lässt sich jede Raumkurve mit ihrem „begleitenden Dreibein“ als System von Differentialgleichungen geben:

$$T' = \kappa N \qquad N' = -\kappa T + \tau B \qquad B' = -\tau N$$

Also in der Summe: die beiden Funktionen Krümmung und Torsion (in Abhängigkeit von der Bogenlänge) bestimmen eine Raumkurve eindeutig!