Mitteilung 07 | 11 Januar 2010

Die Aufgabe 8

Mehrfach war der Wunsch laut geworden, Musterlösungen zu den Aufgaben täten gut. Ihr wüsstet besser einzuschätzen, wenn solche vorlägen, worauf es wohl ankäme, wie man das formuliere, was ich erwarte. Mag sein. Ich verstehe den Wunsch. Zu sehen, wie ein Anderer so etwas aufschreibt, kann etwas mehr an Sicherheit geben. Aber nur dann, wenn Ihr solch eine Lösung eingehend studiert, wenn Ihr sie vergleicht mit Eurer eigenen, wenn Ihr Schlüsse aus dem Vergleich zieht, am besten in Diskussionen unter Euch und bei unseren Treffen.

Dennoch bin ich zurückhaltend dabei, „Muster" für Lösungen zu liefern. Denn selten werden sie wirklich als Muster dienen können. Unter Euch sind Personen, die bessere, genauere, elegantere, witzigere Lösungen produzieren. Toll wäre es halt, Ihr tauschtet Euch unter einander aus, zeigtet Euch, was Ihr gemacht habt und vergleicht das. Macht's!

Ich gebe Euch mal einen Versuch. Bei der Aufgabe 8 (Aufgabenblatt 3) ging es um den Torus und die Gaußsche Flächendarstellung. Der Torus diente als Beispiel für diese Darstellung. Eine typische Übung. Wer nicht in der Veranstaltung war, hatte Probleme dabei, die Flächendarstellung nach Gauß „zu finden".

Die Aufgabe nimmt den Torus als Fall dafür, die sog. Gaußsche Flächendarstellung einzuüben. C.F. Gauß hatte vorgeschlagen, Flächen durch Netze von Parameterlinien darzustellen. Auf der Fläche selbst werden dadurch Koordinaten eingeführt. Gewöhnlich bezeichnet man sie mit u und v, aber selbstverständlich küönnen beliebige andere Bezeichner für die Parameter gewählt werden. In heutigen CAD Programmpaketen findet man häufig die uv-Notation.

Die zulässigen Werte der Parameter müssen so gewählt sein, dass die Eineindeutigkeit der Darstellung gewahrt bleibt (Bijektivität). Erinnert sei an die Definition einer Fläche im R_3:

Eine Fläche ist das topologische Bild eines zweidimensionalen Intervalls, also z.B. $F : [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \rightarrow R_3$

Formal betrachtet, ist eine Fläche danach gegeben als eine stetige und eineindeutige Vektirfunktion von zwei Variablen. Bei gegebenen Werten der beiden Parameter ist $F(u,v)$ der Orts-Vektor zu einem Punkt der Fläche.

Frieder Nake: OAS Gebäude Linzer Str. 9a Raum 3015 | (0421) 218-3525 | nake@informatik.uni-bremen.de
Sprechzeit: Mittwoch 12-14 | www.agis.informatik.uni-bremen.de

a. Ein Torus ist ein beschränkter, geschlossener Körper im R_3. Man bezeichnet die Oberfläche des Torus oft auch, etwas nachlässig, mit dem Wort „Torus" (eigentlich muss es heißen: die „Obrfläche des Torus"). Ein Torus entsteht dadurch, dass eine Kreisscheibe (vom Radius $r > 0$) um eine Achse gedreht wird, die in der Ebene des Kreises liegt und mit dem Kreis keine gemeinsamen Punkte hat. Der Kreismittelpunkt habe von der Drehachse den Abstand $R > r$. Das entstehende Gebilde lässt sich mit einem Ring vergleichen. Manchmal wird seine Entstehung als die Verbiegung eines endlich hohen Zylinders aufgefasst, dessen beide Endflächen mit einander verklebt werden.

(Hier könnten ein paar weitere Eigenschaften zusammengestellt werden.)

Eine Kreislinie vom Radius R beschreibt die Lage der Mittelpunkte der Kreisscheiben (des Radius r), deren Gesamtheit den Torus bestimmen (sein Inneres und den Rand). Mit diesen beiden Radien ist ein Torus bis auf seine Lage im Raum eindeutig bestimmt.

Nur hingewiesen sei darauf, dass dieser Fall ($R > r$) der gewöhnliche und einfachste eines Torus ist. Andere Fälle betrachten wir hier nicht.

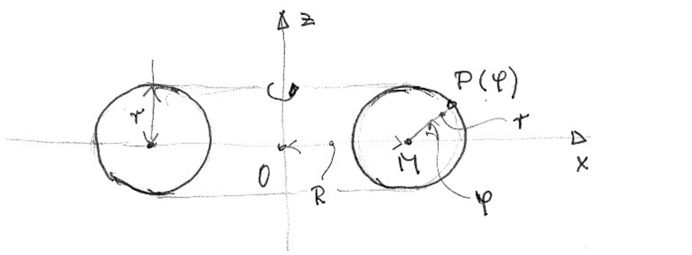

Abb. 1. Schnitt des Torus mit der xz-Ebene

b. Abb. 1 zeigt die typische Ausgangssituation für die Definition des Torus als Rotationskörper. Die z-Achse ist die Drehachse. Den Koordinatenursprung $O = (0 \;\; 0 \;\; 0)$ nennen wir den Mittelpunkt des Torus. Die Schnitte des Torus mit Ebenen senkrecht zur xy-Ebene, die die z-Achse enthalten, sind Kreisscheiben vom Radius r. Ihre Mittelpunkte liegen auf dem Kreis um O in der xy-Ebene und vom Radius R. Zu einem beliebigen Punkt der Torus-Oberfläche gelangen wir, indem wir vom Ursprung O zum Kreismittelpunkt M und von dort zu P auf dem Kreisumfang gehen; daran anschließend erfolgt die Drehung um die z-Achse.

In der xz-Ebene haben die Punkte P – wie man leicht sieht – mit dem Parameter φ die Darstellung

$$P(\varphi,0) = \begin{pmatrix} R + r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Rotation um die z-Achse lässt die z-Koordinate ungeändert. Ist α der Rotationswinkel, so erhalten wir die Punkte der Torus-Oberfläche als

$$P(\varphi,\alpha) = \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\alpha \\ (R + r\cos\varphi)\sin\alpha \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Die Parameter variieren dabei in $0 \le \varphi < 2\pi$ und $0 \le \alpha < 2\pi$. (Die Intervalle sind halboffen, um Eineindeutigkeit zu erzielen.) Das zweidimensionale Parameter-Rechteck ist also $[0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$.

Die Linien $\varphi = const$ bzw. $\alpha = const$ sind die Parameterlinien auf dem Torus. Für $\alpha = const$ erhalten wir eine der „kleinen“ Kreisscheiben in Ebenen senkrecht zur xy-Ebene durch die z-Achse. Für $\varphi = const$ hingegen erhalten wir Kreisringe in Ebenen parallel zur xy-Ebene.

Diese Ebenen liegen in der Höhe $r\sin\varphi$, also zwischen –r und +r. Das Schnittgebilde dieser Ebene mit dem Torus ist ein Kreisring mit O als Mittelpunkt und mit der Breite $2r\cos\varphi$. In der Ebene z = 0 ist der Schnitt ein Kreisring um O, dessen innerer Kreis den Radius R – r hat und dessen äußerer Kreis R + r als Radius hat (Breite des Ringes ist 2r). In den beiden extremen Lagen z = -r bzw. z = r schrumpfen diese Ringe (Breite dann 0) zu Kreislinien des Radius R zusammen.

c. Die partiellen Ableitungen nach beiden Parametern sind

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\cos\alpha \\ -r\sin\varphi\sin\alpha \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -(R+r\cos\varphi)\sin\alpha \\ (R+r\cos\varphi)\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

d. Der Normalenvektor in einem Punkt der Oberfläche des Torus ergibt sich aus dem Kreuzprodukt der beiden partiellen Ableitungen. Die Reihrenfolge der beiden Vektoren bei dieser Multiplikation entscheidet über die Orientierung des Normalenvektors (nach außen oder innen gerichtet).

Wir gewinnen das Kreuzprodukt aus der formalen Berechnung einer 3 x 3-Determinante, in deren erster Zeile jedoch die Einheitsvektoren des Koordinatensystems stehen. Diese Rechnung ist in der Veranstaltung mehrfach vorgeführt worden. Sie wird hier nicht wiederholt. Das Ergebnis ist:

$$N(\varphi,\alpha) = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \times \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -r(R+r\cos\varphi)\cos\varphi\cos\alpha \\ -r(R+r\cos\varphi)\cos\varphi\sin\alpha \\ -r(R+r\cos\varphi)\sin\varphi \end{pmatrix} = -r(R+r\cos\varphi)\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\alpha \\ \cos\varphi\sin\alpha \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors ist, wie man leicht sieht, $|r(R+r\cos\varphi)|$. Denn der Vektor in dem Formelausdruck ist ein Einheitsvektor. Wir erhalten einen normierten und nach außen gerichteten Normalenvektor in einem Punkt der Torusfläche als

$$\overline{N}(\varphi,\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\alpha \\ \cos\varphi\sin\alpha \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Speziell daraus z.B. (als Probe):

$$\overline{N}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{N}(\pi,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{N}(\pi/2,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{N}(3\pi/2,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e. Schließlich ist nach der Gleichung der Tangentialebene in einem beliebigen Punkt der Torus-Oberfläche gefragt. Die errechnete Normale ist selbstverständlich die Normale der Tangentialebene. Um einen beliebigen Punkt in der Tangentialebene zu beschreiben, müssen wir in ihr zwei Parameter einführen, nennen wir sie etwa a und b. Sei $P_0 = P_0(\varphi,\alpha)$ der Punkt auf dem Torus. Er ist zwar beliebig, aber jetzt fest gewählt. Zu einem beliebigen Punkt in der Tangentialebene gelangen wir von P_0 aus, indem wir entlang der beiden

Tangentenvektoren (die partiellen Ableitungen) um Beträge a bzw. b fortschreiten. Wir erhalten für den allgemeinen Punkt der Tangentialebene

$$P(a,b) \quad = \quad P_0(\varphi,\alpha) + a\,P_\varphi(\varphi,\alpha) + b\,P_\alpha(\varphi,\alpha) \quad = \quad \begin{pmatrix} (R + r\cos\varphi)\cos\alpha \;-\; a\,r\sin\varphi\cos\alpha \;-\; b(R + r\cos\varphi)\sin\alpha \\ (R + r\cos\varphi)\sin\alpha - a\,r\sin\varphi\;\sin\alpha + b(R + r\cos\varphi)\cos\alpha \\ r\sin\varphi \;+\; a\,r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Hierin habe ich abkürzend die partiellen Ableitungen mit P_φ bzw. P_α bezeichnet. Noch einmal sei betont: φ, α sind hierin beliebig aber fest gewählt die Parameter des Punktes auf der Torus-Fläche, a und b sind Parameter in der Tangentialebene (beide unbeschränkt variierend).

(Ich hoffe, dass es möglichst wenige Tippfehler gibt.)