2. Formsysteme

Karl Gerstner:
Die Formen der Farbe.
Frankfurt: Athenäum 1986

*Miniaturen
zur Geschichte
der Geometrie*

An der Form sind keine Wissenschaften beteiligt wie an der Farbe, sie ist selbst eine: die Geometrie. 26

Form steht für die räumliche Beschaffenheit der äusseren und inneren Welt; der Gegenstände und der Zwischenräume, die den Mikro- und Makrokosmos bilden. Sie besteht in der Gestalt, wie bestimmt oder unbestimmt sie immer sei. Sowie aus der Grösse, die ihrerseits aus null, einer, zwei oder drei Dimensionen besteht: aus Punkt, Linie, Fläche, Körper – den Gegenständen aller Geometrie.

So faszinierend es ist, darüber hinaus als vierte Dimension die Zeit, und aus der Verbindung von Raum und Zeit die Bewegung miteinzubeziehen, es ist weder mein Fach noch mein Thema; schon gar nicht, eine fünfte, sechste, n Dimensionen in Betracht zu ziehen. Ich beschränke mich sogar auf nur zwei Dimensionen, auf die planimetrischen, die Formen der Fläche. Länge mal Breite kommen in Betracht, mehr nicht.

Die abstrakten Gegenstände des Mathematikers sind auch die formalen Elemente des Künstlers, der damit wieder die Gegenstände der konkreten Welt nachbildet: Lebewesen, Pflanzen, Landschaften, was auch immer. Sie waren auch die Prämisse für Wassily Kandinsky, der sich in seinem zweiten Buch mit der Form beschäftigte: *Punkt und Linie zu Fläche*[1]. Das Buch bildet die theoretische Basis für Kadinskys abstrakte Kunst. Er war der erste, der Punkte, Linien und Flächen nicht dafür verwandte, andere Gegenstände, Inhalte darzustellen; sie selbst sollten der Inhalt seiner Kunst sein. Form als solche, von der Farbe beseelt.

Für Euklid war ein roter Punkt ein Widerspruch in sich selbst: ein Punkt kann keine Farbe haben, da er keine Ausdehnung besitzt, ein *Nullum* ist, das nur gedacht, aber nicht dargestellt werden kann. Der moderne Mathematiker denkt weniger rigide, aber auch für ihn sind die Elemente der Geometrie *Abstrakta*, während sie für Kandinsky anschauliche Wesen mit mannigfachem Charakter sind. Die Form des Punktes kann tausend Ausprägungen haben, wie das Rot tausend Nuancen. Dies wollte er ohne Umwege, unmittelbar zum Ausdruck bringen; die Anmutung der Elemente. Musik fürs Auge.

Wenn hier von Form die Rede ist, ist nicht die Geometrie der Mathematik, sondern die Kandinskys, der Kunst, gemeint.

Im vorhergehenden Kapitel war zu zeigen: dass ich bei der Farbe von einem Ganzen ausgehen kann; von einem universalen System, wie es sich nach dem neuesten Kenntnisstand darstellt: einem in sich geschlossenen Universum, wo jedes Teil mit jedem anderen zusammenhängt. Bei der Form muss ich anders vorgehen, weil ich hier nicht von einem Ganzen, sondern nur von Teilen, von Teilsystemen ausgehen kann – weil die Kenntnis von einem Universum fehlt. Das ist in diesem Kapitel zu zeigen.

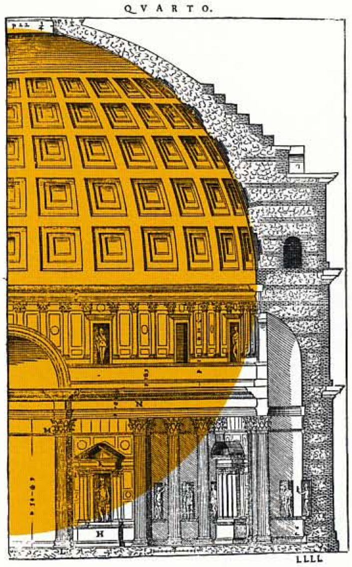
Es enthält einen ganz und gar unsystematischen Streifzug durch die Historie der Geometrie – genauer: der Geometrien; durch die passionierende Geschichte von der Entdeckung stets neuer Formenwelten, Formsystemen. Die Beispiele sind danach ausgesucht, wo Kunst und Geometrie – mal offensichtlich, mal verdeckt – Berührungspunkte haben. Wo einmal die Kunst die Geometrie, dann wieder diese jene beeinflusst. Das Passionierende dabei: dass nicht selten, was als akademisches Gedankenspiel respektive verträumte Gefühlsäusserung begann, unser ganzes Weltverständnis bestimmte.

Jede dieser Geometrien stellt eine Wahrheit in sich selbst dar, die durch folgende Entdekkungen nicht ausser Kurs gesetzt, sondern ergänzt worden ist. Jede hat unser Wissen vom Universum vervollständigt; vollständig ist es noch nicht.

Ergänzend muss ich noch anführen: dass die Geometrie im Lauf der Jahrhunderte eine immer abstraktere Wissenschaft geworden ist, unauflöslich verschmolzen mit Arithmetik und Algebra. Bis zu David Hilberts Axiomen-System, das sie endgültig von jeder Anschauung befreit, von der Kunst abgenabelt hat.

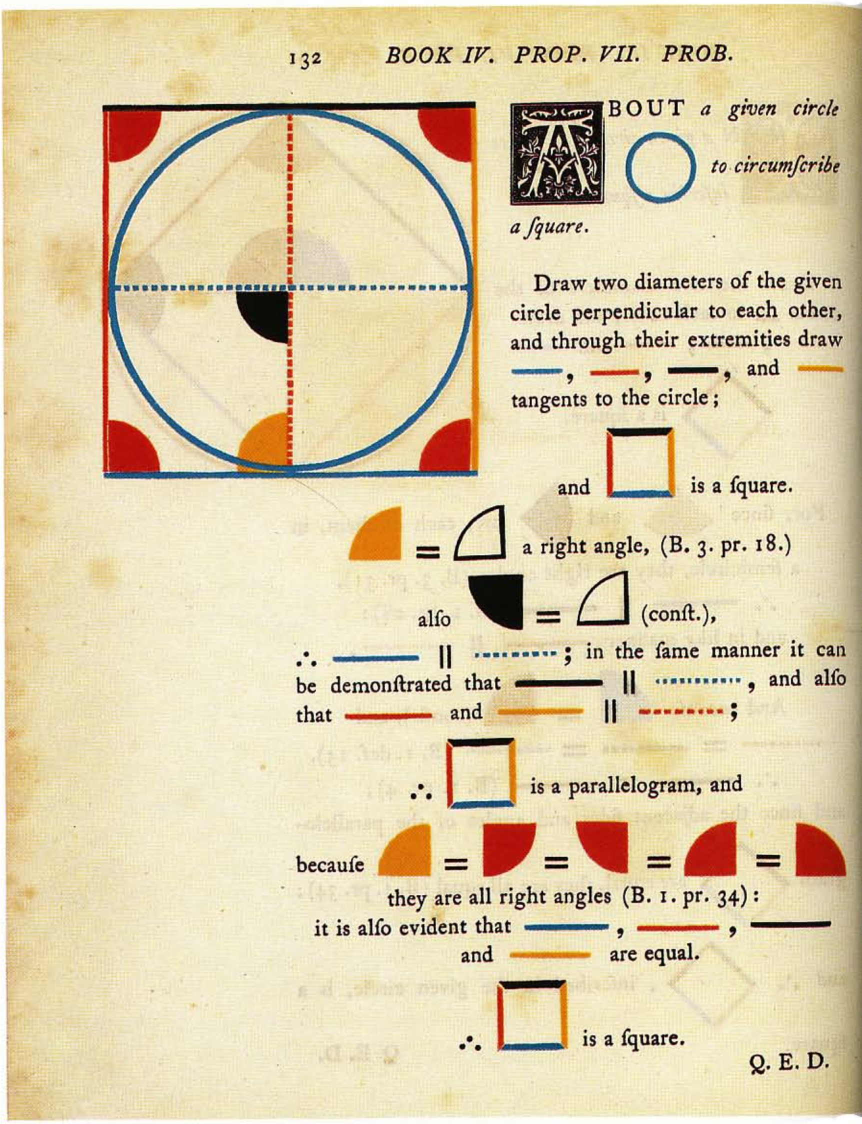
So schien es. In der Zwischenzeit bahnen sich wieder neue Beziehungen an, sozusagen durch die Hintertür. Auf der Seite der Kunst ist Maurits C. Escher ein unermüdlicher Grenzgänger (– der auch in kaum einem Lehrbuch moderner Mathematik fehlt). Auf der Seite der Wissenschaft erschliesst Benoit B. Mandelbrot mit seiner fraktalen Geometrie einen faszinierenden Grenzbereich zwischen Wissenschaft und Kunst (– siehe Seite 44).

[1] *Wassily Kandinsky*
Punkt und Linie zu Fläche
München 1926, Albert Langen



1.1

Euklidische Geometrie



132 BOOK IV. PROP. VII. PROB.

ABOUT *a given circle* *to circumſcribe a ſquare.*

Draw two diameters of the given circle perpendicular to each other, and through their extremities draw , , , and tangents to the circle;

and is a ſquare.

= a right angle, (B. 3. pr. 18.)

alſo = (conſt.),

∴ || ; in the ſame manner it can be demonſtrated that || , and alſo that and || ;

∴ is a parallelogram, and

becauſe = = = =

they are all right angles (B. 1. pr. 34):

it is alſo evident that , , and are equal.

∴ is a ſquare.

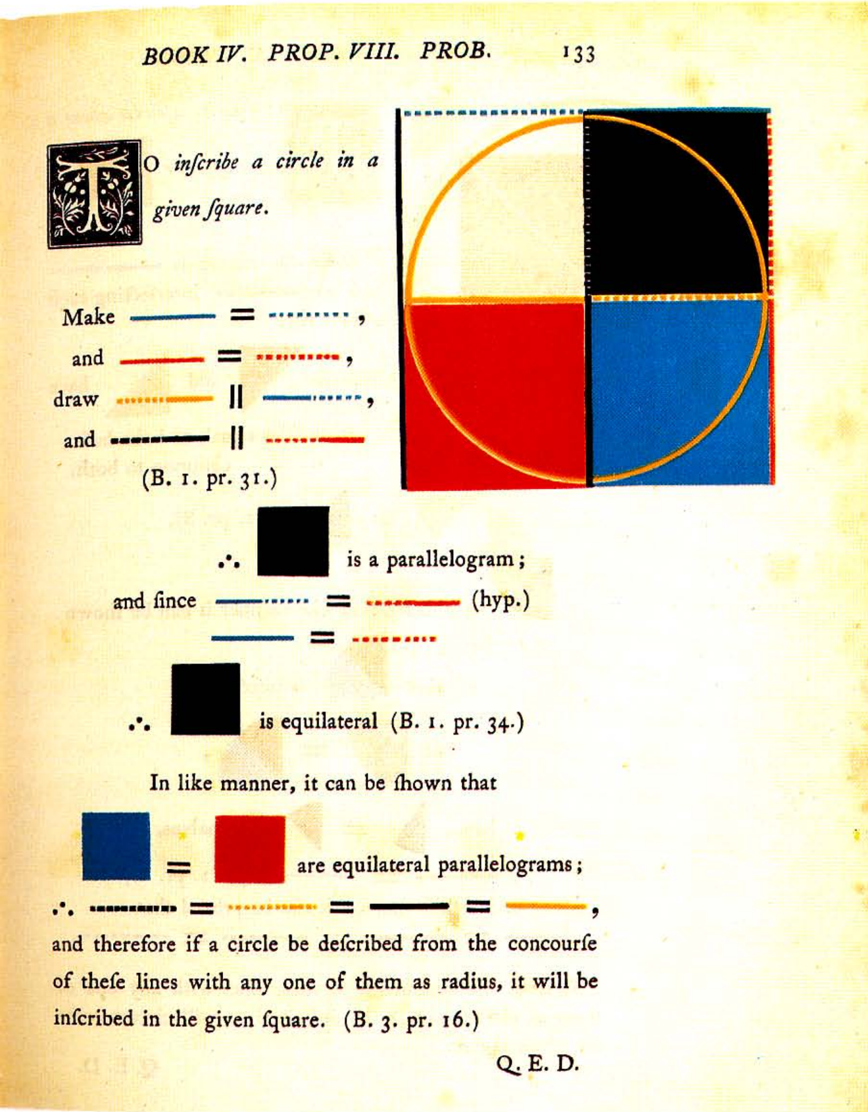
Q. E. D.

2

Die alten Griechen haben die Geometrie nicht erfunden. Aber sie machten sie zu einem Instrument der Welterkenntnis von zwingender Rationalität.

Sie brachten die Fähigkeit einer vorher nie gekannten Abstraktion ein. So, indem sie den Punkt als Element ohne Dimension dachten; die Linie als aus Punkten, die Fläche als aus Linien und die Körper als aus Flächen zusammengesetzt. Sie hatten die Kühnheit, ihren Spekulationen eine Basis von haarsträubender aber zweifelsfreier Selbstverständlichkeit zugrunde zu legen – wie zum Beispiel das Axiom: dass, was sich deckt, gleich ist.

Vor allem entwickelten sie die Methode, mit logischer Deduktion ihre Behauptungen zu beweisen. Auf diese Weise kamen sie schon früh, im 6. Jahrhundert vor Christo, zu Erkenntnissen, die ans Wunderbare grenzten; die den Status göttlicher Offenbarung besassen wie der Satz des Pythagoras. Kein Zufall: dass die Pythagoräer eine quasireligiöse



BOOK IV. PROP. VIII. PROB. 133

TO *inſcribe a circle in a given ſquare.*

Make = ,

and = ,

draw ‖ ,

and ‖

(B. 1. pr. 31.)

∴ is a parallelogram;

and ſince = (hyp.)

=

∴ is equilateral (B. 1. pr. 34.)

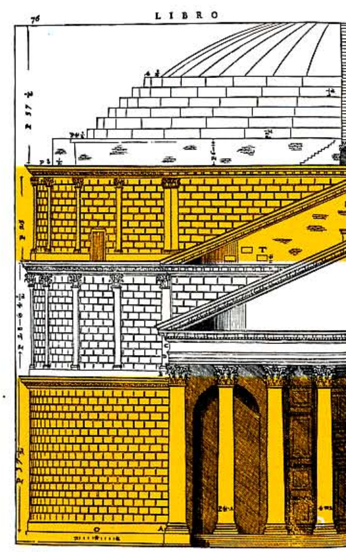
In like manner, it can be ſhown that

= are equilateral parallelograms;

∴ = = = ,

and therefore if a circle be deſcribed from the concourſe of theſe lines with any one of them as radius, it will be inſcribed in the given ſquare. (B. 3. pr. 16.)

Q. E. D.



1.2

Sekte bildeten mit heiliger Ehrfurcht vor Zahlen und Zahlenverhältnissen, die sie in den Schwingungen harmonischer Töne wie in den Planetenbahnen wiederfanden.
Im 3. Jahrhundert vor Christo fasste Euklid das gesamte mathematische Wissen des Altertums zusammen: in den 13 Bänden der *Elemente*. Das Buch enthielt die Lehre von den Formen und ihren Beziehungen, von Gestalten, Grössen und Proportionen. Es sollte nach der Bibel das am häufigsten verlegte Werk werden; auch kein Zufall.

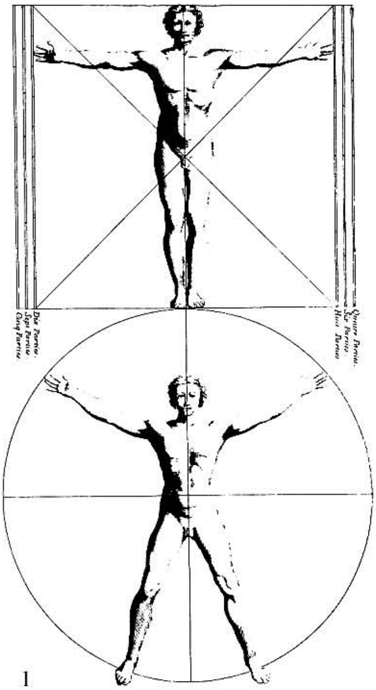
Abbildung 2 zeigt von tausenden bisher erschienenen Ausgaben eine besonders originelle: die Darstellung Euklids in Farbe. Hier: zwei Seiten aus dem vierten Buch, der Kreislehre.[2]

Die Philosophen, besonders Platon, verstanden die Geometrie als eine reine, als eine Wissenschaft um ihrer selbst willen. Lasst niemand eintreten, der nicht der Geometrie kundig ist, stand über dem Eingangstor zu seiner Akademie. Trotzdem konnte nicht ausbleiben: dass sich andere Wissenschaften und die Kunst ihre Errungenschaften zu eigen machten.

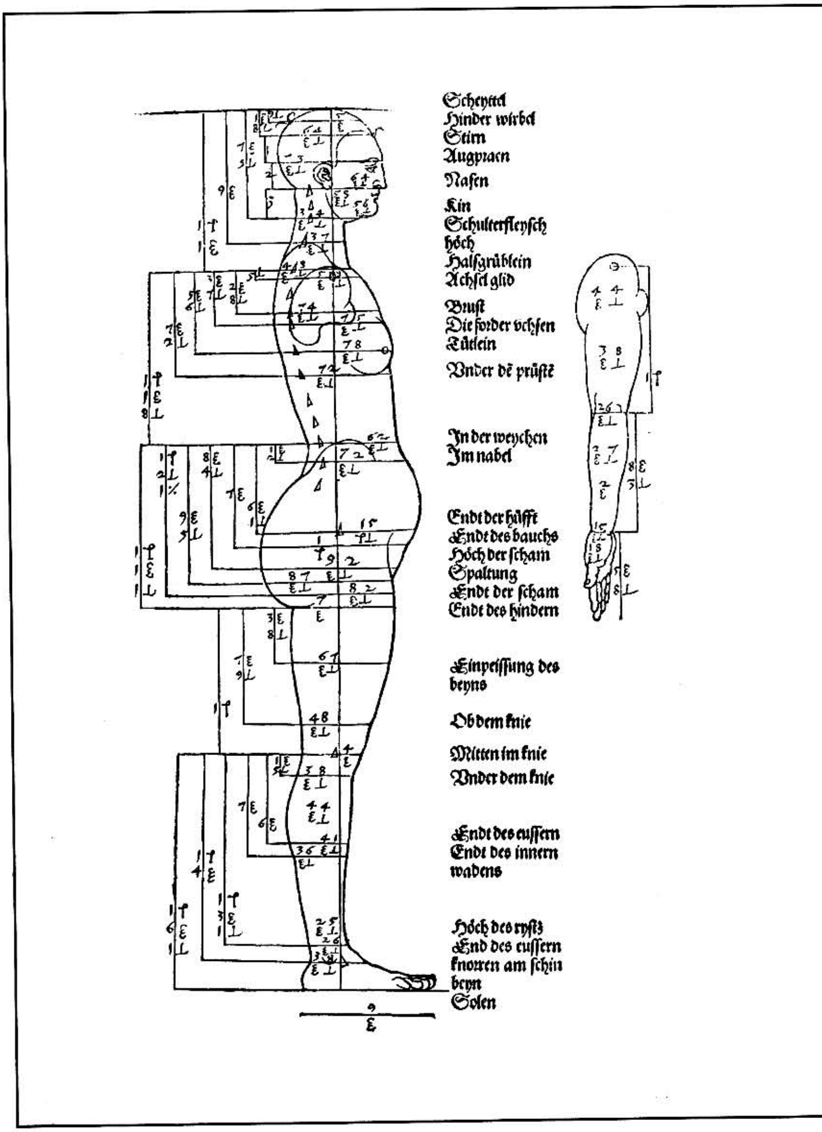
Beispiel Pantheon in Rom, aus der Zeit Hadrians. Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen analytische Zeichnungen des Renaissance-Architekten Andrea Palladio.[3] Links ein Schnitt, der den Innenraum als einbeschriebene Kugel zeigt; rechts die Aussenansicht mit den Proportionen aus geometrischen Reihen.

[2] *Oliver Byrne*

[3] *Andrea Palladio*



1



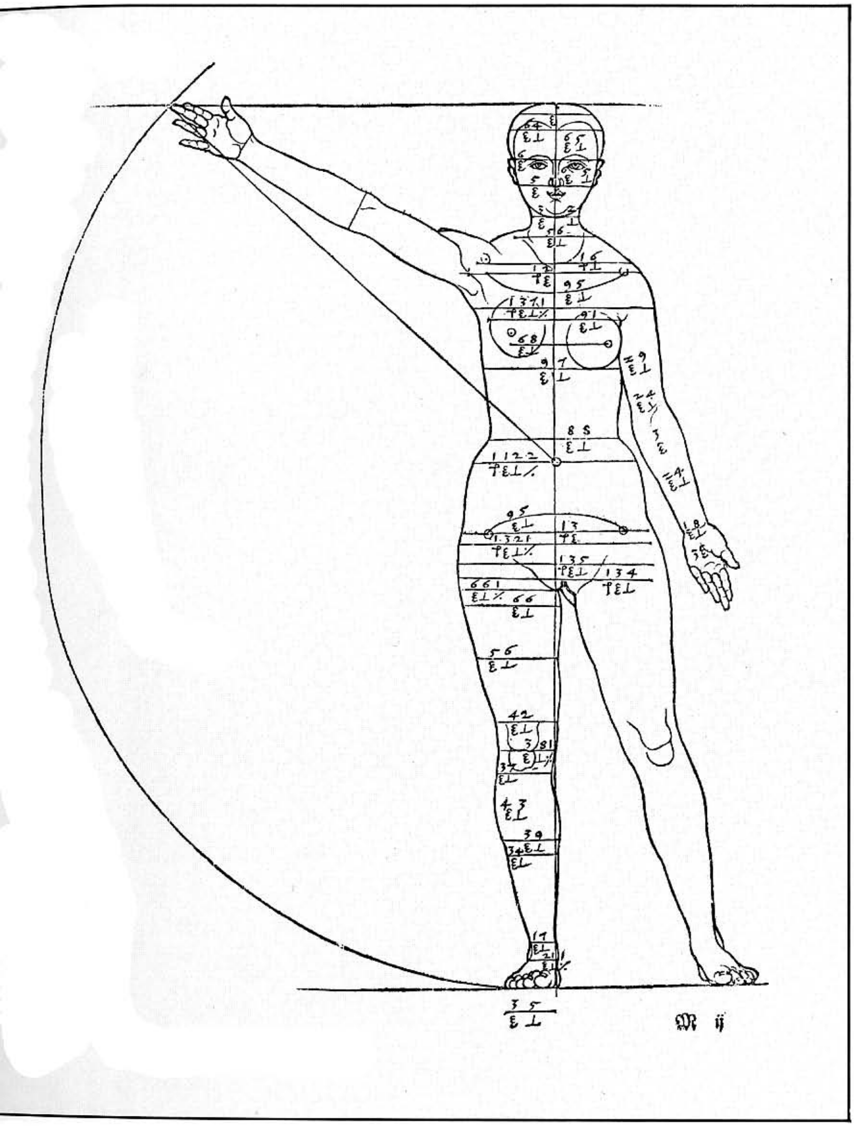
2

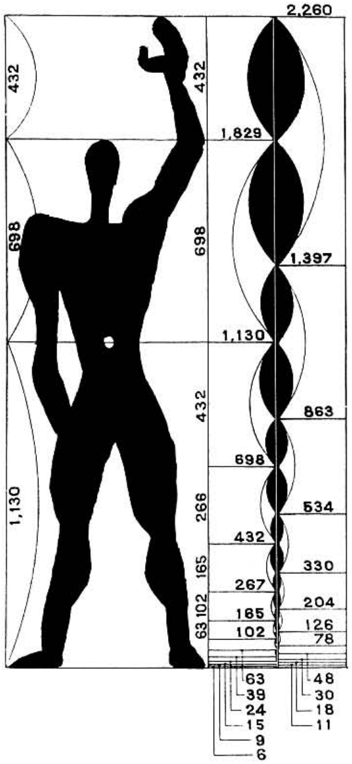
Geometrie des Masses

Die Zahlen bilden die Grundlage, sie sind die Worte der Geometrie. Wo es ums Zählen geht,ist ihre Bedeutung absolut. Drei ist die Hälfte mehr als Zwei, und ein Viertel weniger als Vier. Aber wenn es ums Messen geht, ist ihre Bedeutung relativ.

Damit die Geometrie beim Messen zu verwenden ist, muss sie um etwas ergänzt werden: um eine Einheitsgrösse, ein absolutes Mass, das jedem Wissenszweig eigen ist. Für den Geometer ist dies der Erdumfang, für den Informatiker das Bit, für den Physiker die Lichtgeschwindigkeit. Für den Künstler gilt immer noch, was schon Protagoras, auch er ein alter Grieche, als Postulat aufstellte: das Mass aller Dinge ist der Mensch.

Das ist sowohl im übertragenen Sinn als auch wörtlich zu verstehen. Die kleinste Einheit war bei den alten Griechen das Dactylos, ein Fingerbreit. Grössere wurden von der Handbreite, von der Spanne, der Elle oder dem Fuss übernommen.





Vitruv fand im menschlichen Körper nicht nur die Masse, sondern auch ein Beziehungssystem der Masse. Der stehende Mann, mit ausgebreiteten Armen, ist in ein Quadrat einzuschreiben; mit gespreizten Beinen in einen Kreis, mit dem Nabel als Zentrum – womit Vitruv den Menschen mit den Figuren der elementaren Geometrie in Übereinstimmung brachte. Abbildung 1 aus einer französischen Ausgabe.[4]

Darüber hinaus stand für ihn fest: dass jedes Glied mit dem Ganzen des Körpers in harmonikaler Übereinstimmung steht; wobei der Modul dafür der zehnte Teil des Quadrats ist.

Vitruv, er lebte im ersten Jahrhundert nach Christo, ging – wie vor ihm auch die griechischen Bildhauer – vom Ideal eines Menschen aus. Albrecht Dürer ging davon aus: dass es dieses Ideal nicht gibt; dass die Voraussetzungen grundverschiedene sind, je nachdem, ob ein Mensch weiblich oder männlich, alt oder jung, gross oder klein, dick oder dünn, breit oder schmal ist. Sein Werk *Von der menschlichen Proportion*,[5] aus welchem Abbildung 2 eine Doppelseite zeigt, ist ein Kompendium aller möglichen Typen, eine Geometrie des menschlichen Masses.

In unserem Jahrhundert hat sich besonders Le Corbusier mit dem Problem beschäftigt. Er wollte dem unter Napoleon eingeführten Meter – der millionste Teil des Erdquadranten – wieder ein menschliches Mass entgegensetzen.

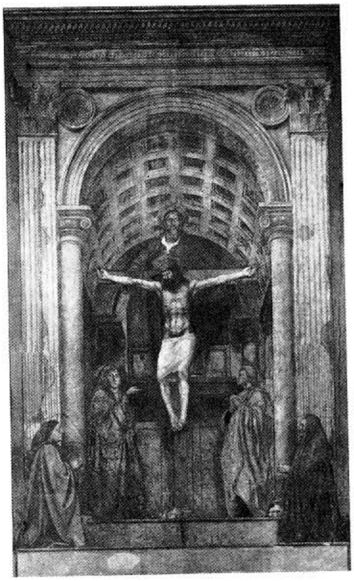
Das Produkt ist der *Modulor*, ein Entwurfsystem aus einem Mass, 113 cm (= die Höhe des Nabels, vom Boden her gemessen), und einer Proportion, dem Goldenen Schnitt. Das heisst: 113 cm ist die

Höhe der Fensterbrüstung; im Goldenen Schnitt geteilt ergeben sich 70 und 43 cm; Tisch- und Stuhlhöhe. Die Verdoppelung = 226 cm ist die Zimmerhöhe, der Mann mit ausgestrecktem Arm. Und so weiter, Abbildung 3.[6] In seinen späten Bauten gibt es kein Mass, das nicht im Modulor enthalten ist.

[4] *M. Perrault*

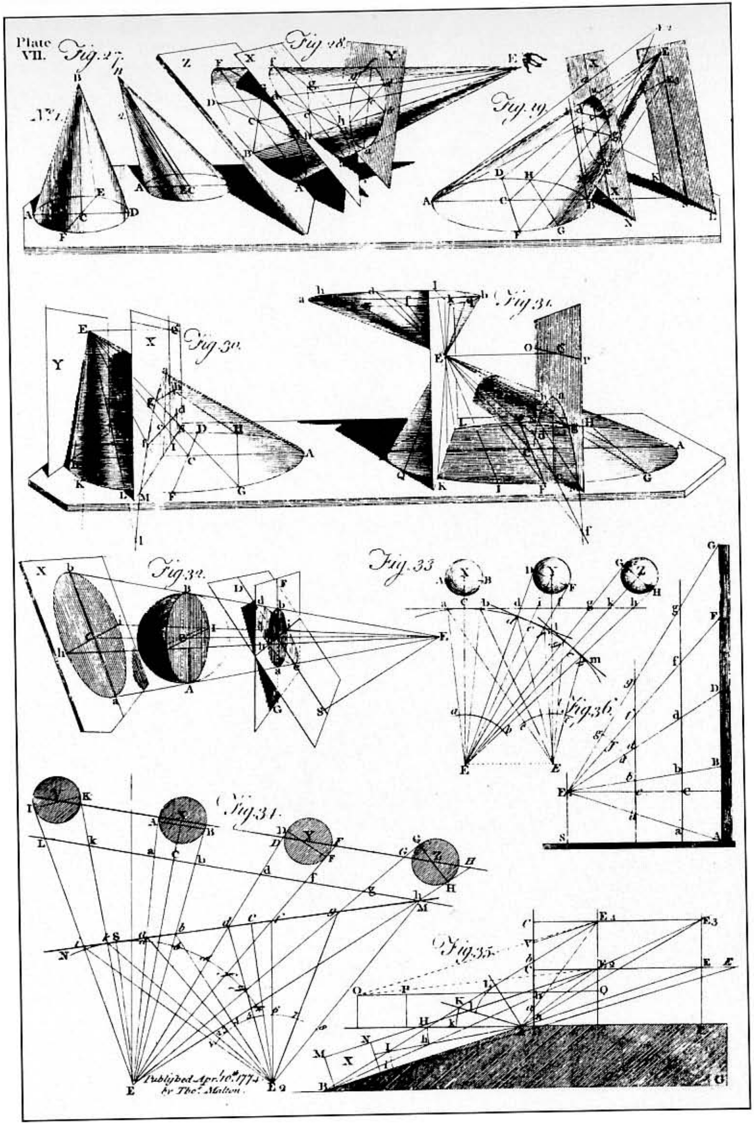
[5] *Albrecht Dürer*

[6] *Jean Petit*



1

Projektive Geometrie



2

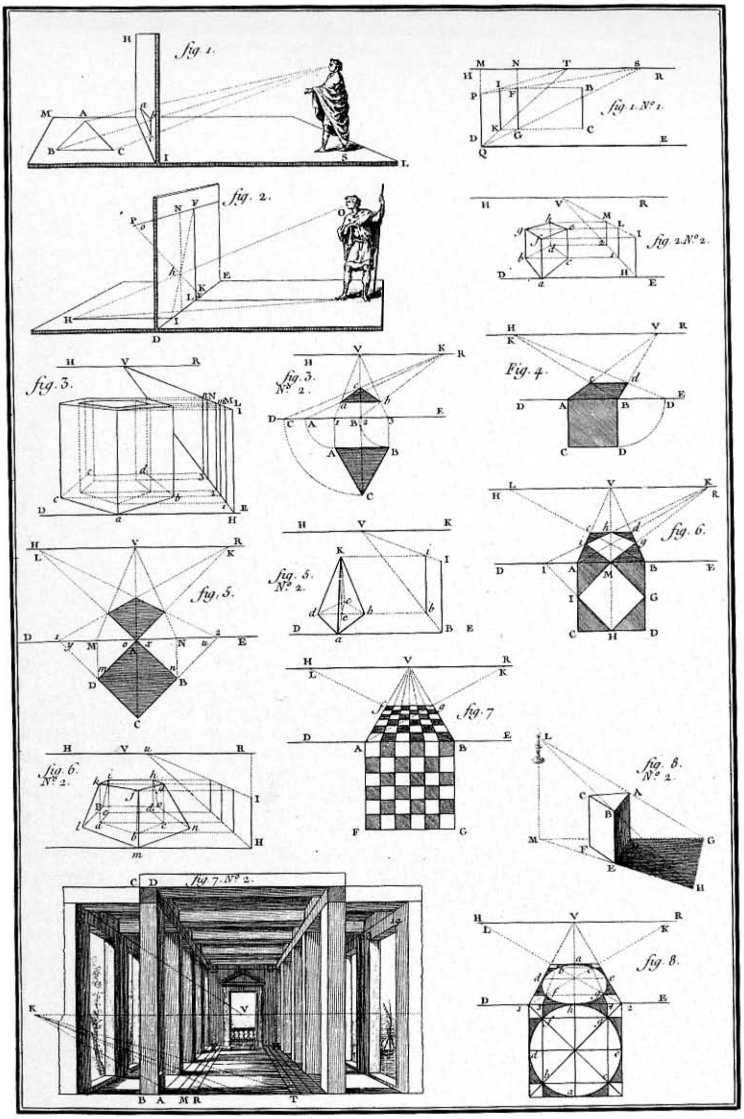
Der Mensch ist nicht nur das Mass aller Dinge, er ist auch der Mittelpunkt aller Dinge. Nämlich von allem, was sein Auge von der Welt erschaut.

Wo sich die Kunst ein Abbild davon macht, muss sie mit dem Problem fertig werden, den dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Bildfläche zu projizieren. Ein Problem der Geometrie.

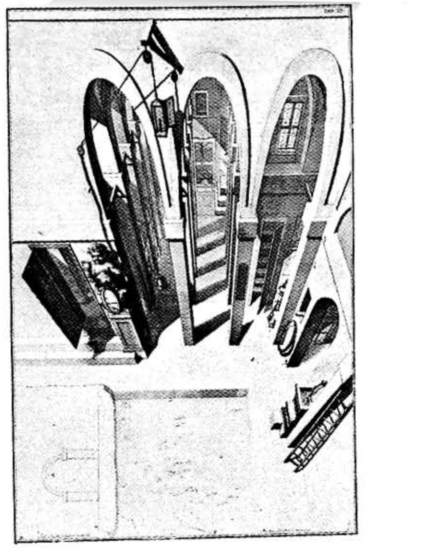
Wie die alten Griechen damit fertig wurden, wissen wir nicht, es sind keine Gemälde erhalten geblieben. Die Römer verstanden es, Bilder von verblüffender räumlicher Illusion zu malen. Und zwar aufgrund von Beobachtungen, also intuitiv. Wie die Illusion zu konstruieren ist, blieb Künstlern des 15. Jahrhunderts vorbehalten.

Die Entdeckung der perspektivischen Projektion passt ins Weltbild der Renaissance. Denn in der byzantinisch orientierten Kunst davor war Perspektive, weil Naturalismus, nicht gefragt.

[7] *Thomas Malton*
A Complete Treatise of Perspective
in Theory and Practice
London 1779



3



4

Erstaunlich nur: dass die Grundlagen dafür damals schon an die zweitausend Jahre alt waren. Denn die Geometrie hatte im zweiten Jahrhundert vor Christo die Voraussetzung geschaffen: in der Lehre von den Kegelschnitten des Apollonios von Pergae.

Die Linse unseres Auges fokussiert die Welt durch einen Punkt, der der Spitze eines Kegels mit endloser Ausdehnung entspricht. Jedes Moment, jedes Bild im Strahlenkegel unserer Sicht – die optische Wirklichkeit – stellt sich als Kegelschnitt dar. Aller Perspektive und Projektion muss die Beziehung von Kegel und Schnittebene zwangsläufig zugrunde liegen. Abbildung 2.[7]

Künstler wie Leone Battista Alberti, Piero della Francesca, Paolo Uccello waren die wahren Geometer ihrer Zeit. Sie fanden zuerst die Gesetze der Konstruktion mit einem Fluchtpunkt, die Zentralperspektive. Wie sie in der Kreuzigung von Masaccio zur Anwendung kam, Abbildung 1.

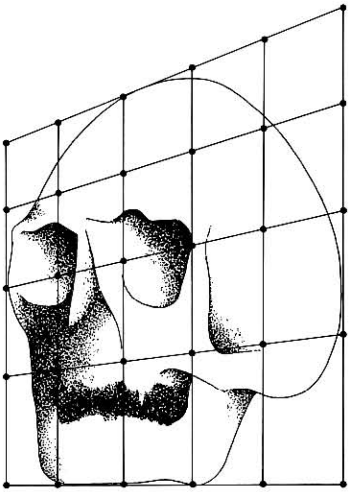
Danach wurden die Konstruktionen mit zwei Fluchtpunkten in der Horizontalen entdeckt, die eine noch bessere Wirkung erzeugten. Die Maler lernten, die Perspektive nach Belieben weitwinklig oder in der Art des Teleobjektivs einzustellen; ferner die Schatten korrekt zu projizieren- alles Konstruktionen, um möglichst realistische Bilder zu machen. Abbildung 3.[8]

Im folgenden Abschnitt der Kunstgeschichte vervollständigte sich die Entwicklung. Der dritte Fluchtpunkt in der Vertikalen kam dazu, und damit wurden – in Umkehrung des ursprünglichen Zwecks – Perspektiven möglich, die es in Wirklichkeit gar nicht gibt. Abbildung 4.[9]

Der Begriff *projektive Geometrie* ist hier in seinem ursprünglichen Sinn gemeint. Heute versteht der Fachmann darunter die Geometrie, die im 17.Jahrhundert mit Gérard Desargues begann – jedoch nichts anderes ist als die mathematische Verallgemeinerung der Entdeckungen der Renaissance-Künstler.

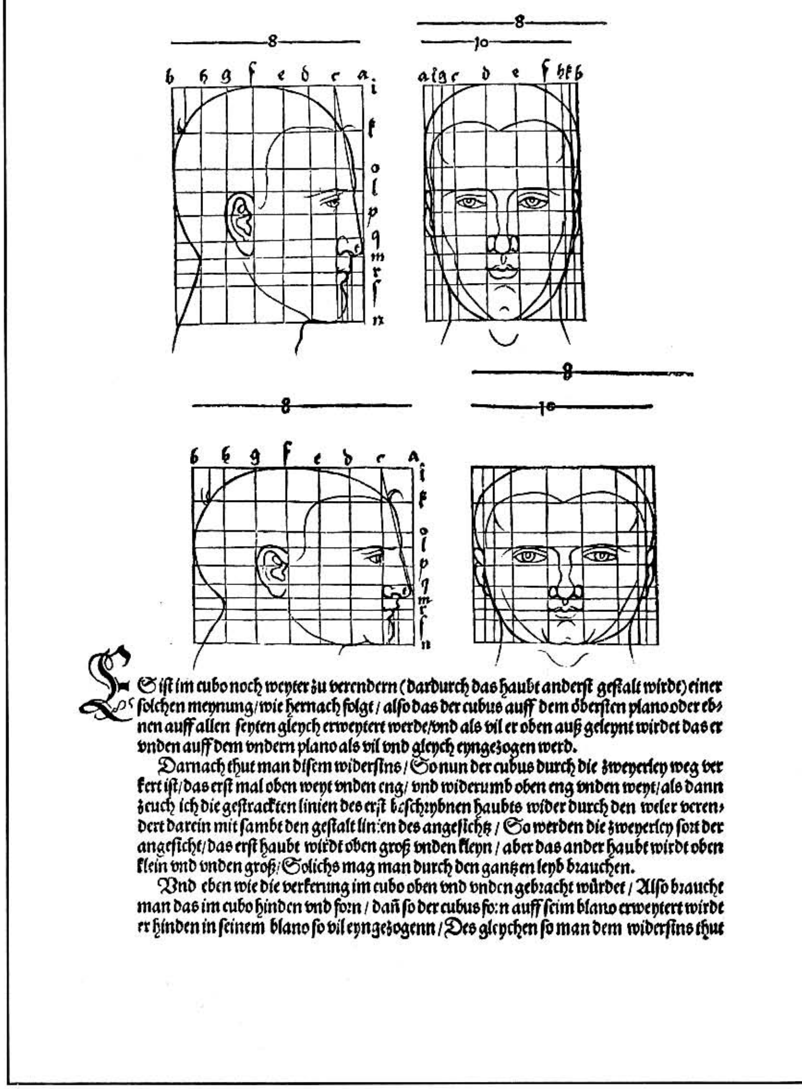
[8] *Diderot et D'Alembert Encyclopédie, Tome cinquième Paris 1755*

[9] *Johann Jakob Schübler Perspectiva Nürnberg 1719/1720*



1.1

1.2



Es ist im cubo noch weyter zu verendern (dardurch das haubt anderst gestalt wirdt) einer solchen meynung/wie hernach folgt / also das der cubus auff dem obersten plano oder ebnen auff allen seyten gleych erweytert werde/vnd als vil er oben auß geleynt wirdet das er vnden auff dem vndern plano als vil vnd gleych eyngezogen werd.

Darnach thut man disem widersins / So nun der cubus durch die zweyerley weg verkert ist/das erst mal oben weyt vnden eng/ vnd widerumb oben eng vnden weyt/als dann zeuch ich die gestrackten linien des erst beschrybnen haubts wider durch den weler verendert darein mit sambt den gestalt linien des angesichts / So werden die zweyerley sort der angesicht/das erst haubt wirdt oben groß vnden kleyn / aber das ander haubt wirdt oben klein vnd vnden groß/Solichs mag man durch den gantzen leyb brauchen.

Vnd eben wie die verkerung im cubo oben vnd vnden gebracht würdet / Also brauche man das im cubo hinden vnd forn / dañ so der cubus forn auff seim blano erweytert wirdt er hinden in seinem blano so vil eyngezogenn / Des gleychen so man dem widersins thut

2

Koordinaten-Geometrie

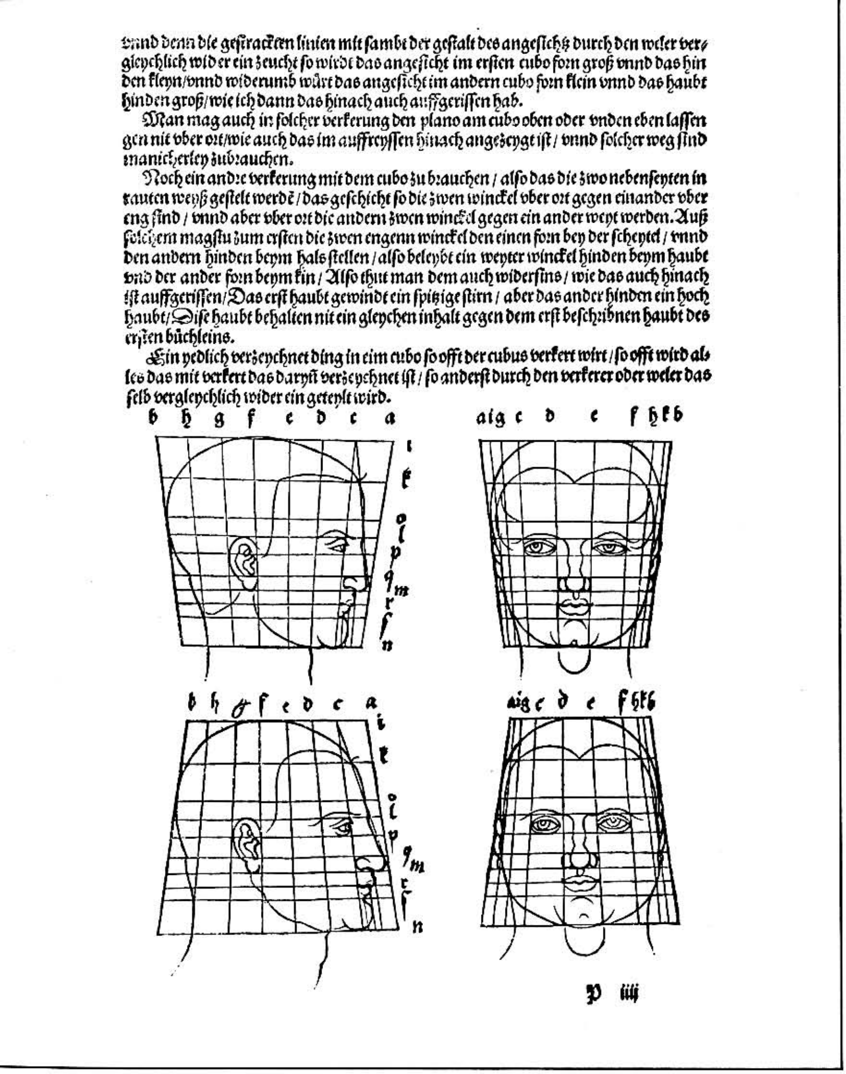
Mit dem Koordinaten-Gitter aus x- und y-Achse vereinigte René Descartes die Geometrie mit der Algebra. Und trat einen vorher nie gekannten Erkenntnisschub los.

Ein Vorzeichen dafür findet sich schon bei Dürer. Er zeichnete menschliche Gesichter als Kurven in Abszissen und Ordinaten. Und durch die Veränderung der Koordinaten erhielt er nicht nur andere Proportionen, sondern auch andere Charaktere, Abbildung 2.[10]

Ausserdem potenzierte er dieses Verfahren, indem er die Koordinaten perspektivisch projizierte. Eine Methode, die auch Hans Holbein der Jüngere, Dürers Zeitgenosse, in einem einzigen und einzigartigen Bild, den *Gesandten*, anwandte. Abbildung 1.2.

Zwischen den beiden dargestellten Männern schwebt, schräg, ein undefinierbarer Gegenstand. Er ist nichts anderes als ein zugleich deutliches und verschlüsseltes Memento mori. Denn, entschlüsselt wie in der

[10] *Albrecht Dürer*
Die vier Bücher
von menschlicher Proportion
Nürnberg 1528



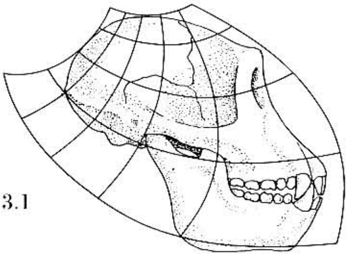
vnnd denn die gestracken linien mit sambt der gestalt des angesichts durch den weler vergleychlich wider ein zeucht so wirdt das angesicht im ersten cubo forn groß vnnd das hinden kleyn/vnnd widerumb wärt das angesicht im andern cubo forn klein vnnd das haubt hinden groß/wie ich dann das hinach auch auffgerissen hab.

Man mag auch in solcher verkerung den plano am cubo oben oder vnden eben lassen gen nit vber ort/wie auch das im auffreyssen hinach angezeygt ist / vnnd solcher weg sind manicherley zubrauchen.

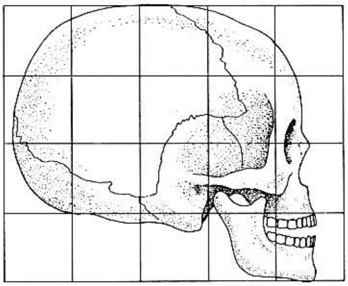
Noch ein andre verkerung mit dem cubo zu brauchen / also das die zwo nebenseyten in rauten weyß gestelt werdē / das geschicht so die zwen winckel vber ort gegen einander vber eng sind / vnnd aber vber ort die andern zwen winckel gegen ein ander weyt werden. Auß solchem magstu zum ersten die zwen engenn winckel den einen forn bey der scheytel / vnnd den andern hinden beym hals stellen / also beleybt ein weyter winckel hinden beym haubt vnd der ander forn beym kin / Also thut man dem auch widersins / wie das auch hinach ist auffgerissen/Das erst haubt gewindt ein spitzige stirn / aber das ander hinden ein hoch haubt/Dise haubt behalten nit ein gleychen inhalt gegen dem erst beschribnen haubt des ersten büchleins.

Ein yedlich verzeychnet ding in eim cubo so offt der cubus verkert wirt / so offt wird alles das mit verkert das daryn verzeychnet ist / so anderst durch den verkerer oder weler das selb vergleychlich wider ein geteylt wird.

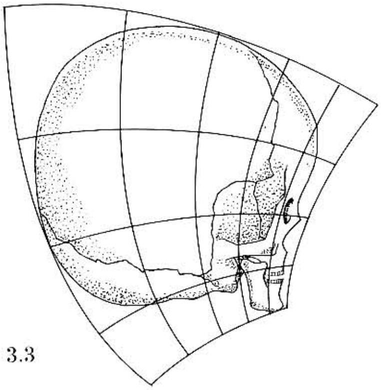
P iiii



3.1



3.2



3.3

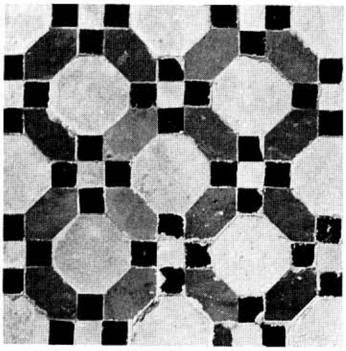
Zeichnung 1.1, erkennt man darin einen Totenschädel.

In dem auf die Generation Holbeins und Dürers folgenden Manierismus uferte die Methode aus und wurde zum Selbstzweck. Die Bilder wurden zu virtuos konstruierten Vexierbildern in allen möglichen Varianten, wie den Anamorphosen. Der Effekt dabei ist die Verblüffung; die Kunst bleibt platt.

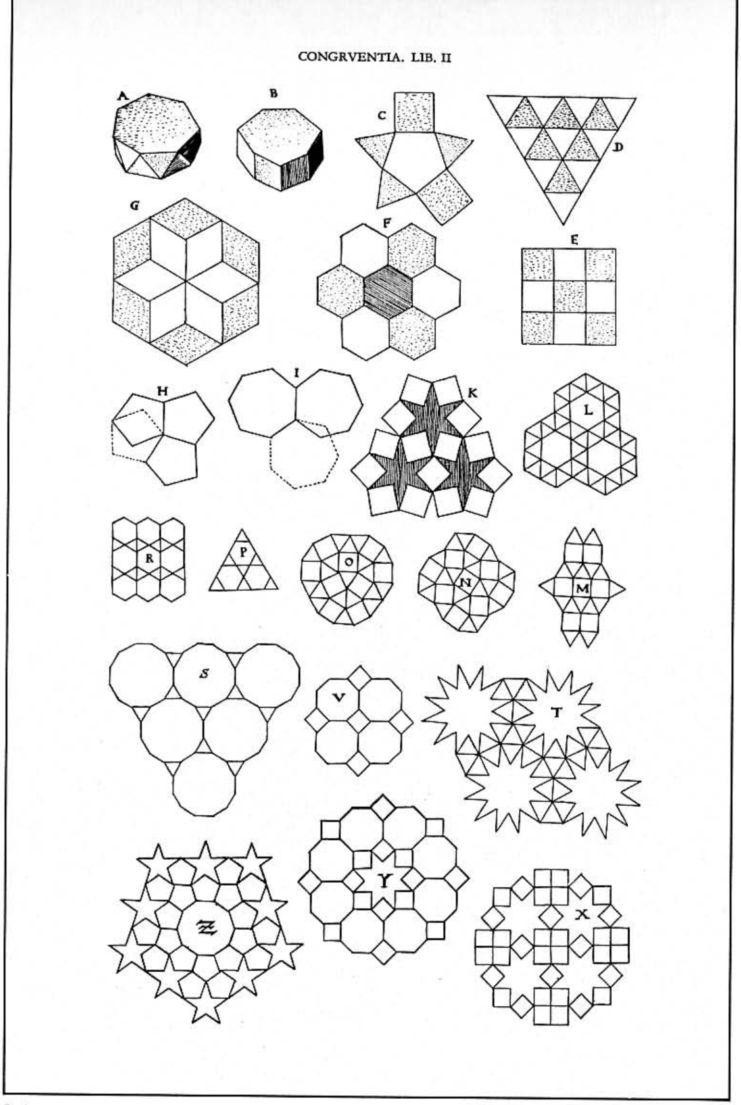
Inhaltsreicher ist eine andere Weiterentwicklung der Methode. Der Biologe D'Arcy Thompson hat daraus, indem er das Koordinaten-Gitter räumlich verzog, eine schlüssige Evolutionsmorphologie abgeleitet. Ausgangspunkt war der Menschenschädel in einem ebenen, regelmässigen Gitter, Abbildung 3.2. Durch entsprechenden Verzug erhält er alle Vorformen davon, hier ein Schimpansenschädel; Abbildung 3.1.[11]

Als Wissenschaftler hat sich Thompson einer Versuchung verschlossen, der ich nicht widerstehen konnte. Nämlich mittels der Methode, mit der die Vergangenheit so überzeugend zu analysieren ist, in die Zukunft zu blicken. Abbildung 3.3 zeigt den Menschenschädel, wie er mutmasslich in einer Million Jahren aussehen wird.

[11] *D'Arcy Thompson*
On Growth and Form
Cambridge 1917, University Press



1



2.1

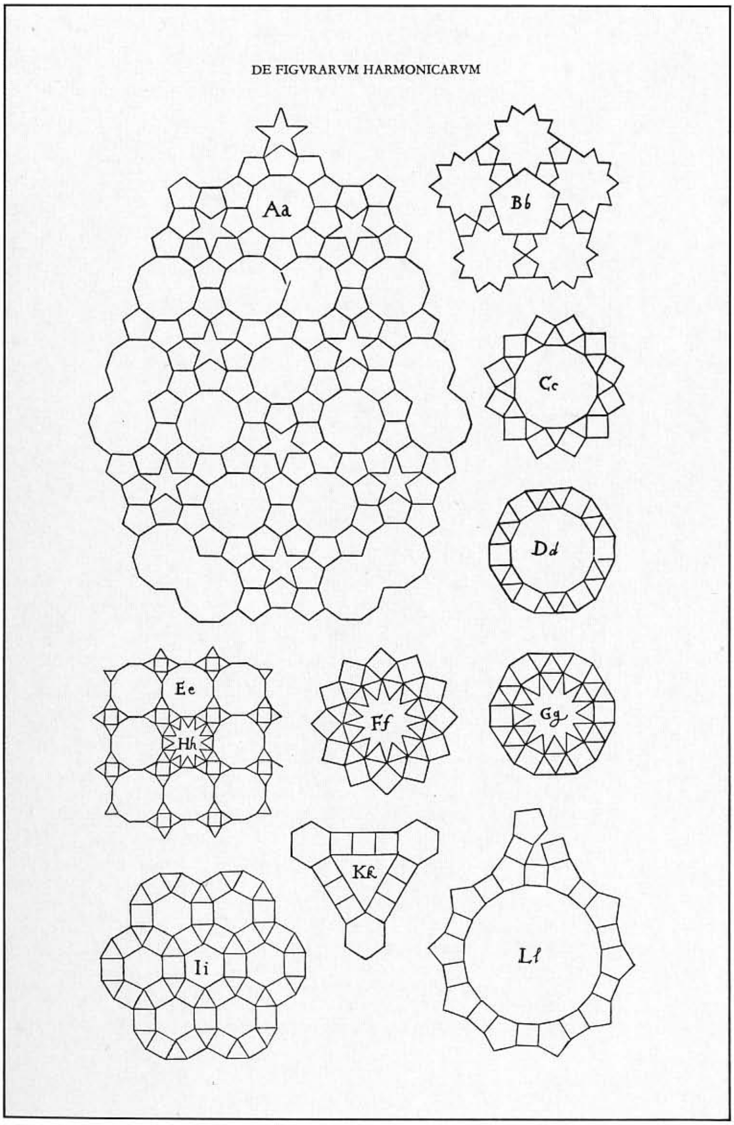
Geometrie als Weltgesetz

Grund und Wurzel aller Ordnung im Weltbau liegt in der Geometrie. Sie ist ‚ewig wie Gott und aus dem göttlichen Geist hervorleuchtend'. Dieser Glaubenssatz stammt von Johannes Kepler. Er lebte in der späten Renaissance, an der Schwelle zu den modernen Naturwissenschaften. Selbst ein bahnbrechender Neuerer – er errechnete die elliptischen Bahnen der Planeten – verfasste er noch einmal eine umfassende Kosmogonie im Geist der Antike: *Harmonices mundi*, von der Harmonie der Welt; 1619 erschienen. [12]

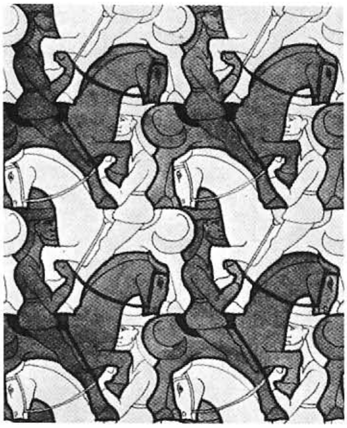
Aber Kepler hat mit dem, was er die Zahlenmystik der alten Griechen nennt, nichts im Sinn. Er geht von den geometrischen Figuren aus als von ‚Vernunftdingen, und Vernunft ist ewig'. Sie allein sind – ‚wenn es die Frömmigkeit zu sagen erlaubt, auf die gleiche Art der Erkenntnis, wie Gott sie hat, insoweit wir sie wenigstens in diesem irdischen Leben erfassen können'.

Harmonisch heisst für Kepler weltbildend. Und in den ebenen, regelmässigen Vielecken müssen ‚die

[12] *Johannes Kepler*
Harmonices mundi, Buch 5
Linz 1619, Godofredi Tampachii



2.2



3

weltbildenden Verhältnisse' gesucht werden. Er war vermutlich der erste, der das Problem systematisch anging.

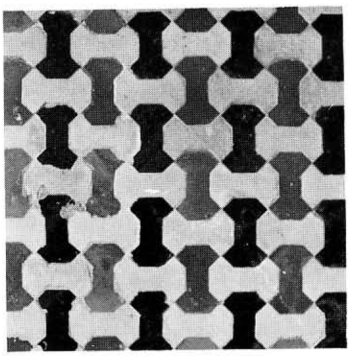
Er fand dabei drei ,vollkommenste Kongruenzen' – im heutigen Sprachgebrauch Mosaiken, Tesselationen – aus einem einzigen Element, nämlich Dreieck, Quadrat, Sechseck (– in den Kapiteln 5 und 6 werden sie noch eine Rolle spielen, siehe Seite 74), und neun ,vollkommene' aus zwei oder drei regelmässigen Vielecken, in der Art von Abbildung 1. Sowie eine nicht näher definierten Anzahl aus Vielecken und Sternformen von Vielecken. Diese Untersuchungen bilden einen konstituierenden Teil der Weltharmonik, Abbildungen 2.1 und 2.2.

,Wie Gott als höchstes Gut sich notwendig mitteilen müsse, so habe er, der von Ewigkeit her die Bilder der regulären Vielecke in sich trage, notwendig die Ideen der Körper schaffen müssen, für die diese Vielecke die Potenz in sich tragen; entsprechend werde der spekulative Geist des Menschen durch diese Potenz eingeladen, selber zu schaffen und zu gestalten.' Man liest aus Keplers Sprache: dass er nicht nur der geniale Rationalist der Planetengesetze und der Geometer der Mosaike ist, sondern auch Mystiker; ein Formenmystiker.

Im Ganzen genommen ist seine Weltharmonik heute schwer nachzuvollziehen. Aber offenbar hat er ein Thema ins Visier genommen, das bis in die Gegenwart die Wissenschaftler anzieht. So suchte Albert Einstein nach einer einheitlichen Feldtheorie, Werner Heisenberg nach einer Weltformel.

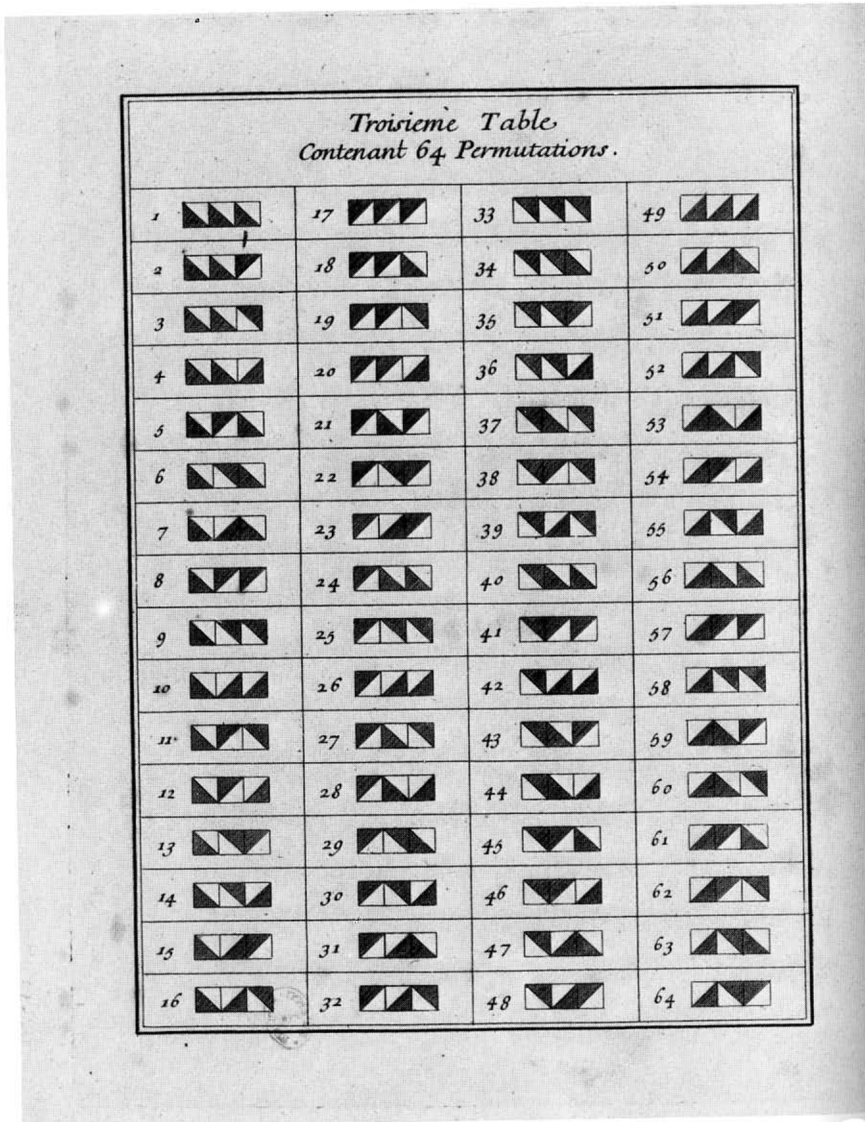
Und selbst die regulären Mosaiken sind als Forschungsdisziplin aktuell geblieben: in der nichteuklidischen Geometrie, die allgemeinere Polygonbegriffe – und mithin mehr Möglichkeiten zulässt als die euklidische.

Wer sich darüber Rechenschaft gibt: dass von den akademischen Anfängen der nichteuklidischen Geometrie ein direkter Weg zur modernen Physik (mit allen Konsequenzen) führt, kann sich auch dies vorstellen: dass am Ende Keplers Sicht nicht so sehr mystisch als vielmehr apokalyptisch ist. Wie die apokalyptischen Reiter, die Maurits C. Escher in ein Mosaik gebracht hat.



1.1

Gruppentheorie

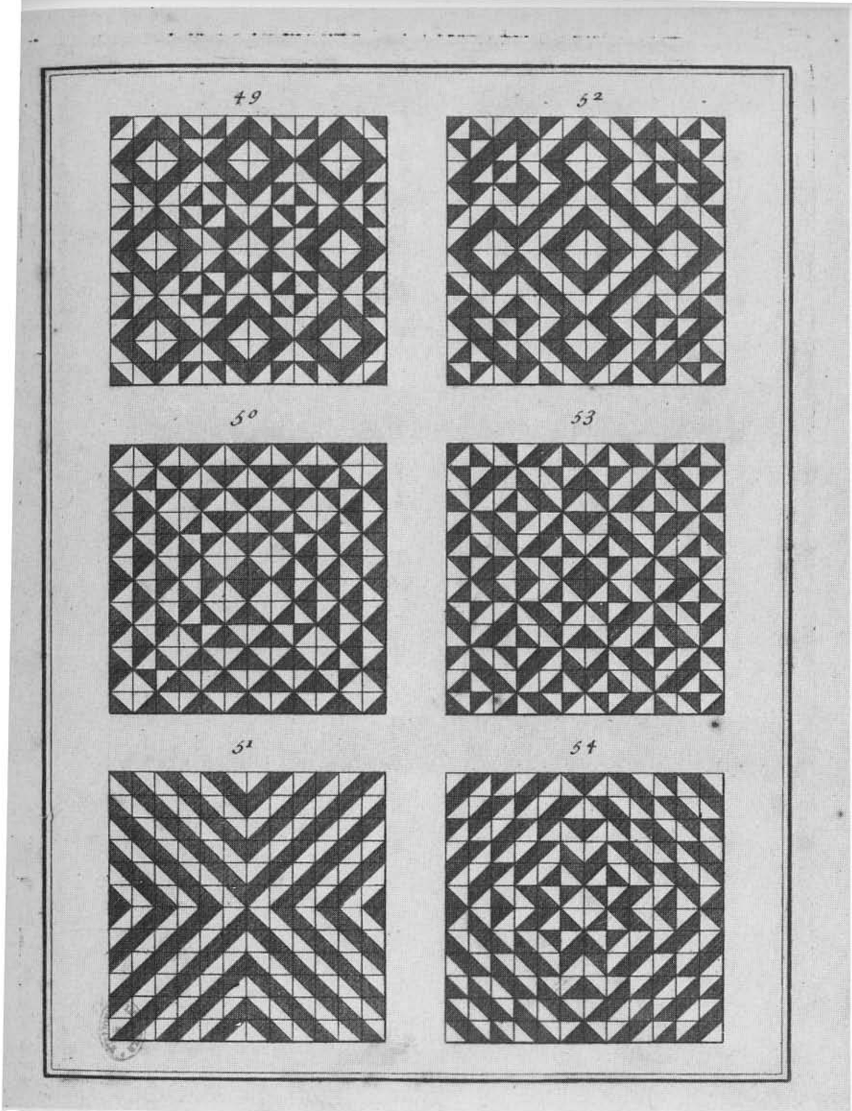


2

Die Geschichte mindestens der frühen Geometrie kann man so verstehen: dass sie für spezifische Tätigkeiten allgemein gültige Ableitungen, Formeln, fand. Dass sie aus Praktiken Theorien machte – die wiederum Grundlage erweiterter Praktiken wurden.

Lange vor Pythagoras war das pythagoräische Dreieck bei den Ägyptern in Gebrauch. Sie wussten mit einem Dreieck aus den Seitenverhältnissen 3:4:5 einen rechten Winkel aufzurichten. Aber Pythagoras fand die Formel, die nicht nur für dieses, sondern für sämtliche rechtwinkligen Dreiecke gilt.

Die Gruppentheorie ist eine verhältnismässig junge Disziplin, 1822 von Evariste Galois begründet. Ihr Kernbegriff, die Gruppe, ist für die moderne Mathematik zum ebenso elementaren Begriff geworden wie Grösse, Mass, Funktion oder Menge. Er bezeichnet ein System von Dingen – Zahlen oder Formen – mit gemeinsamen Eigenschaften.



1.2

1.3

Die Quintessenz – dass nur die Verknüpfung und nicht die Beschaffenheit der Elemente wichtig ist –, fand Galois bei den Permutationsgruppen. Das sind Gruppen, die aus den Vertauschungen einer bestimmten Zahl von Elementen bestehen.

Hundert Jahre früher verfasste Père Dominic Douat eine praktische Anleitung, wie man aus wenigen Elementen durch Permutieren *‚eine Infinität von verschiedenen Mustern erzeugen kann'*. Abbildung 2 zeigt zwei Seiten daraus.[13]

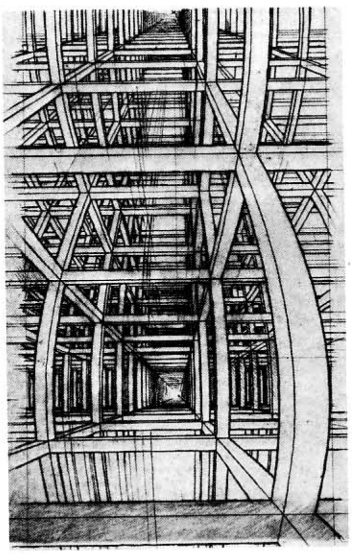
Hundert Jahre nach Galois veröffentlichte Andreas Speiser die *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*.[14] Auch hier hat nicht die Mathematik Kunst, sondern die Kunst Mathematik hervorgebracht. Denn Speiser analysierte Ornamente aus dem alten Ägypten und der Alhambra und fand dabei heraus: dass er mit keiner bekannten Mathematik ihre Komplexität in Formeln fassen konnte. Abbildungen 1.

Da die Ornamente aus gleichen Elementen bestehen, die in einfachen bis verwickelten Symmetrien miteinander verknüpft sind, ging Speiser von den elementaren Symmetrieoperationen aus: von Schiebung, Drehung, Spiegelung. Durch Kombination erhielt er Vollständigkeit, eben die Gruppe sämtlicher Symmetrieoperationen. Siebzehn im ganzen, mit denen er alle Ornamente – die, von denen er ausging und alle denkbaren – mathematisch beschreiben konnte.

Bemerkenswert: dass in diesem Fall eine Praktik, so alt wie die ältesten Kulturen, Pate auch einer der modernsten Disziplinen der höheren Mathematik war.

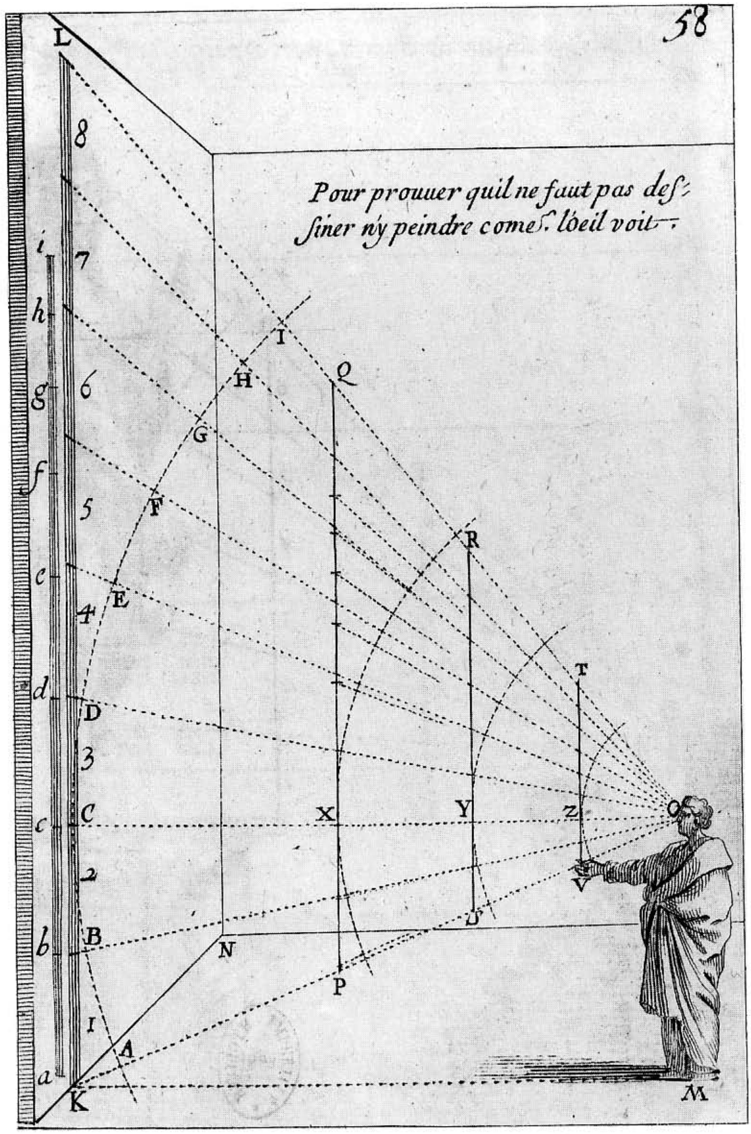
[13] *Père Dominique Douat*
Méthode pour faire
une infinité de desseins differens
Paris 1722

[14] *Andreas Speiser*
Die Theorie der Gruppen
von endlicher Ordnung
Berlin 1922, Julius Springer



1

Nichteuklidische Geometrie

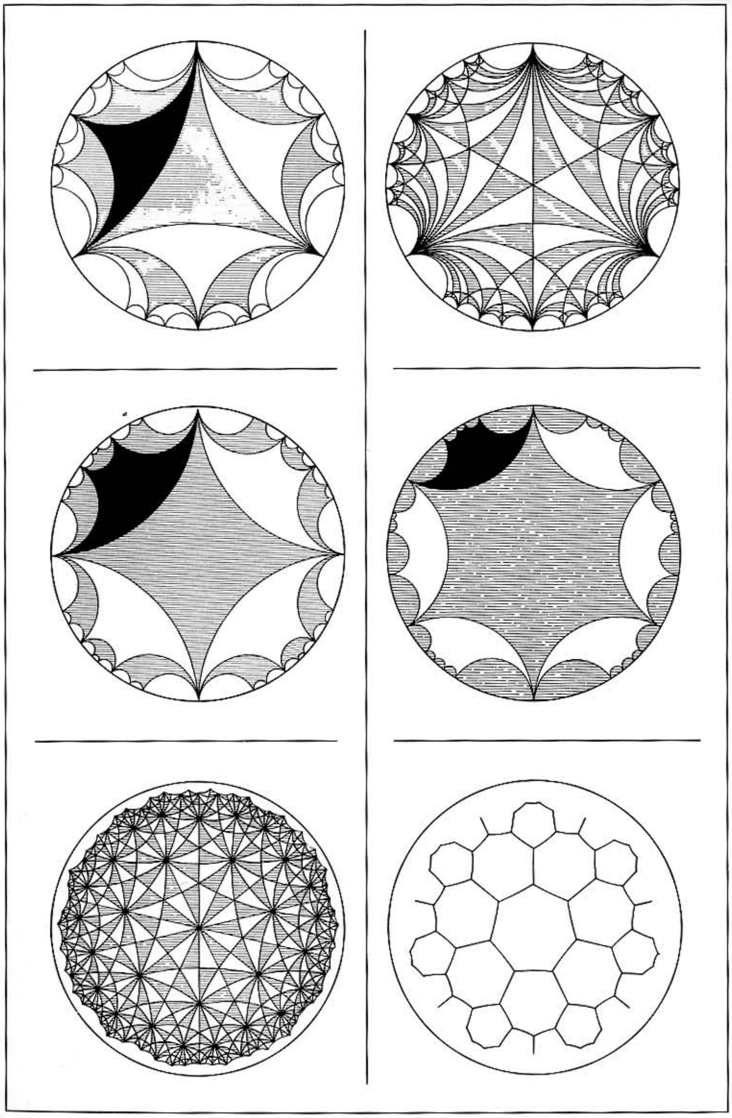


2

Die Axiome Euklids sind dem menschlichen Denken inhärent, schrieb Immanuel Kant. Er schrieb es, als sich das euklidische Zeitalter dem Ende zuneigte.

Die Gültigkeit des euklidischen Raums ist zwar nicht ausser Kurs gesetzt wie das ptolemäische Weltbild durch Kopernikus. Aber es sind neue Räume von ungeahnten und unvorstellbaren Eigenschaften hinzugekommen, nichteuklidische. Die Bezeichnung stammt von Carl Friedrich Gauss, der auch, sozusagen im Verborgenen, Problem und Lösung vorwegnahm. Noch zu seinen Lebzeiten (er starb 1855) gab es zwei nichteuklidische Geometrien: die hyperbolische von Bolyai/Lobatschewski und die elliptische von Bernhard Riemann.

Beide unterscheiden sich von der euklidischen Geometrie durch etwas ganz und gar Lächerliches, scheinbar Lächerliches: die Winkelsumme ihrer Dreiecke ist nicht 180 Grad, sondern kleiner im ersten, grösser im zweiten Fall. Und zwar: weil die



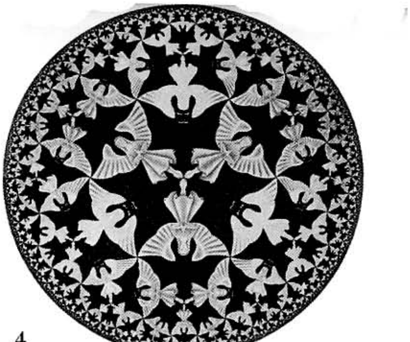
3

Dreiecke nicht auf einer ebenen, sondern auf einer hyperbolisch respektive sphärisch gekrümmten Fläche liegen.

Dieser abstrakte Sachverhalt drückt etwas sehr Konkretes aus: dass es in der Welt und im Weltraum keine oder kaum Ebenen gibt, sondern nur gekrümmte Flächen. Auf der Oberfläche der Erdkugel – um ein naheliegendes Beispiel zu nehmen – hat das gleichseitige Dreieck aus den Quadrantseiten drei rechte Winkel, also 270 Grad.

Auf den nichteuklidischen Flächen ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten nicht mehr die Gerade, die gerade, sondern gekrümmt ist.

Abbildung 2 ist ein Beispiel für elliptische, genauer: sphärische Geometrie, an einer alltäglichen Erfahrung exemplifiziert. Es illustriert: dass die Bilder, die wir sehen, zwar Kegelschnitte sind, aber nicht in einer Ebene geschnitten, sondern in der Innenseite einer Kugel, deren Zentrum das Auge ist.



4

Diesen Sachverhalt hat man lange vor der nichteuklidischen Geometrie erkannt, wie der Kupferstich aus dem 17. Jahrhundert beweist. Der Text zum Bild erläutert: ‚dass man weder zeichnen noch malen darf wie das Auge sieht'. Was das Auge in Wirklichkeit als Kreisbögen wahrnimmt, stellt der Maler als Gerade dar.[15] Nicht so Escher, in der Studie eines Raumgitters, Abbildung 1.

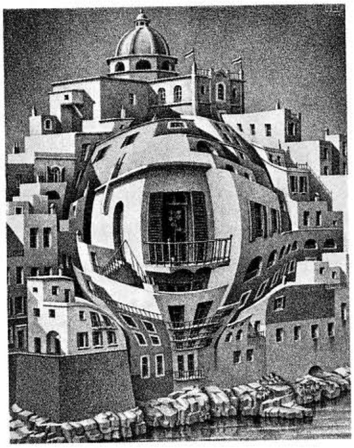
Abbildung 3 ist ein Beispiel für hyperbolische Geometrie, an den Kreisfiguren von Felix Klein exemplifiziert. Sie kommen zwar aus den höheren Regionen der Mathematik, lassen aber an den nach innen gekrümmten Dreieckseiten klar erkennen: dass die Winkelsumme kleiner als 180 Grad sein muss. Wer genauer hinsieht, entdeckt in allen Formen Dreiecke, gegen den Rand stets deformierter und bis ins Unendliche kleiner werdend.

Es handelt sich um eine völlig neue Art von Mosaiken, wo nicht nur Dreieck, Quadrat und Sechseck, sondern alle Vielecke – hier: das Siebeneck – flächendeckend sind. Ferner um eine völlig neue Art der Perspektive, mit unendlich vielen Fluchtpunkten am Rand des Kreises.[16] Übrigens ist dies auch die Geometrie eines sehr modernen Geräts: des Fish-Eye-Objektivs.

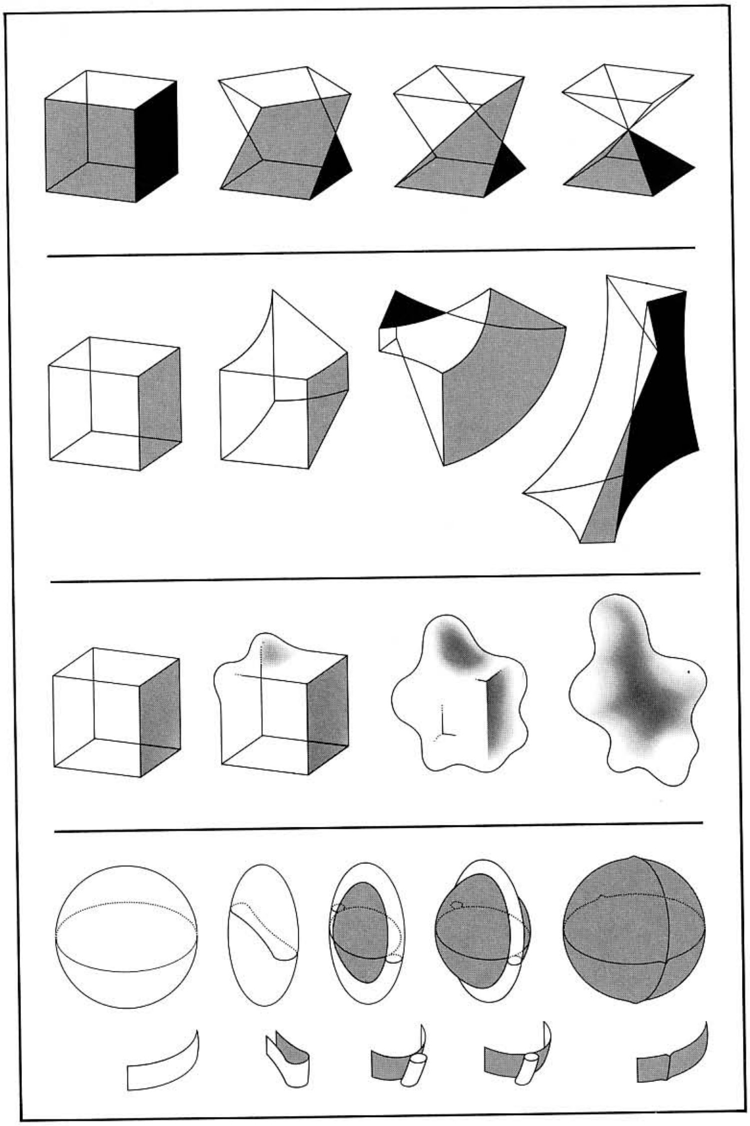
Escher hat damit ein himmlisches Thema dargestellt: *Engel und Teufel*, Abbildung 4.

[15] *Abraham Bosse*
Traité des pratiques géometrales
et perspectives
Paris 1665

[16] *Wilhelm Magnus*
Noneuclidean Tesselations
New York 1974, Academic Press



1



2

Topologie

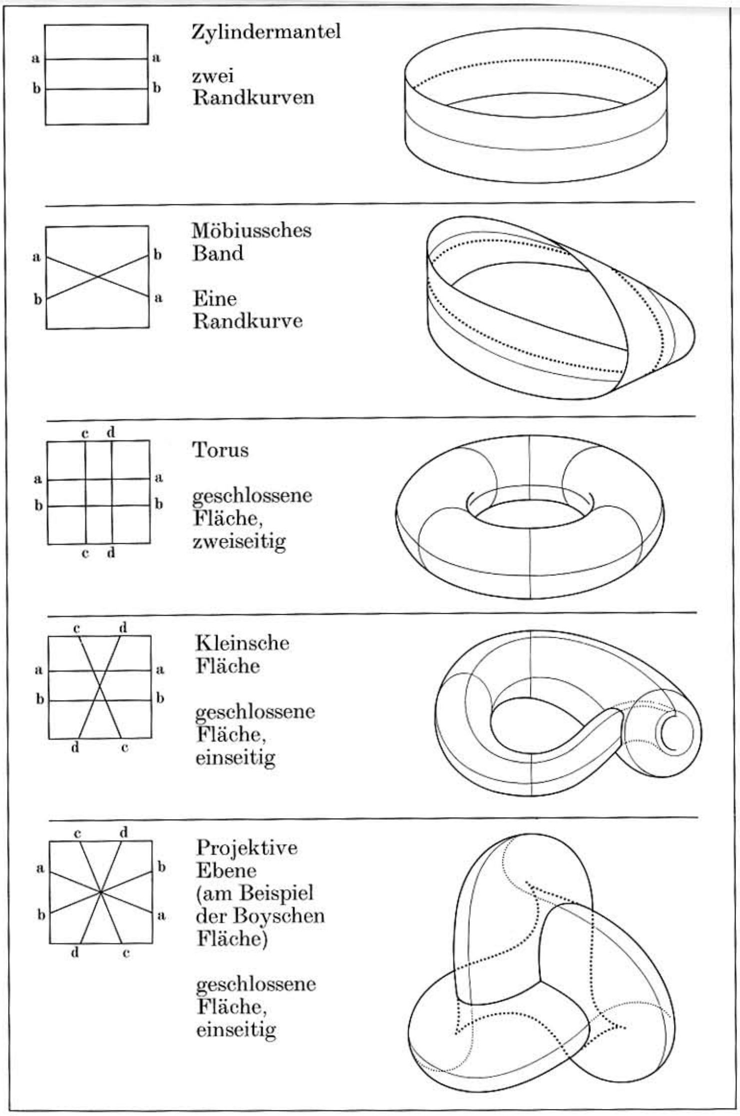
Geometrie als Wissenschaft der Form, das impliziert auch – neben der Transformation, mit der sich die Gruppentheorie beschäftigt – die Deformation. Damit beschäftigt sich die Topologie. Beides mathematische Disziplinen von höchster Aktualität und Fruchtbarkeit.

Die Topologie untersucht die Eigenschaften einer Form, die unverändert bleiben – wenn die Form verändert wird. In Abbildung 2 wird ein Würfel verdreht; wie Gummi verzogen und gedehnt; wie eine Knetmasse in eine beliebige, andere Form verwandelt. In der Kugel schliesslich wird das Innere nach aussen respektive das Äussere nach innen verkehrt.[17]

Die Topologie erlaubt sich mit einer gegebenen Form alles, vorausgesetzt, sie bleibt sozusagen in ihrem Wesen erhalten.

In Abbildung 1, *Der Balkon* von Escher, erkennt man eine topologisch aufgeblasene Form im Ensemble der Stadtansicht.

[17] *Anthony Phillips*
Turning a Surface inside out
Scientific American, May 1966



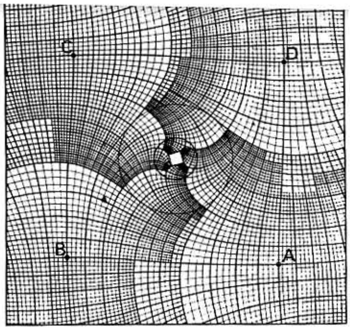
3

Die Topologie ist das Vermächtnis von August F. Möbius, was wörtlich zu verstehen ist. In einem Artikel, nach seinem Tod 1868 publiziert, beschreibt er ein Band mit merkwürdigen Eigenschaften, das als Möbiussches berühmt werden sollte wie die platonischen Körper.

Das Merkwürdigste dabei ist: jeder kann es ohne die geringsten mathematischen Kenntnisse selbst herstellen, indem er einen Streifen Papier um 180 Grad dreht und zusammenklebt. Jeder kann seine Eigenschaften nachvollziehen und feststellen: dass er ohne die Kanten zu überqueren die Vorder- und Rückseite des Bandes passieren kann. Er kann es einmal, zweimal der Länge nach zerschneiden und erlebt jedesmal eine phänomenale Überraschung.

Ein Objekt – und eine Geometrie zum Anfassen. Und gleichzeitig rätselhafter, komplexer als jede zuvor.

Im Unterschied zum euklidischen Zylinderring, einem ‚orientierbaren‘



4.1

4.2

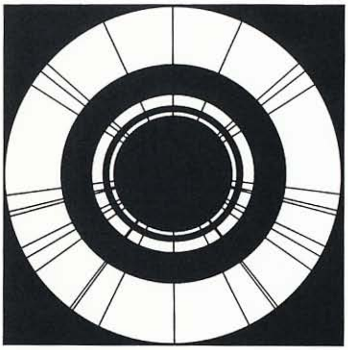
Gegenstand mit Innen- und Aussenflächen ist das Möbiussche Band ‚nicht orientierbar‘. Es ist – und das ist seine Besonderheit – einseitig, seine Innen- ist gleichzeitig seine Aussenfläche.

Abbildung 3 enthält die Systematik der Flächen mit zunehmender topologischer Komplexität, nach David Hilbert.[18]

Die Kleinsche Fläche ist eine einseitige, zu einem Körper verformte Fläche, die sich selbst durchdringt. Sie hat – wie das Möbiussche Band – kein Innen und Aussen, ist aber geschlossen, ihre Oberfläche endlos: eine Flasche, unmöglich zu füllen.

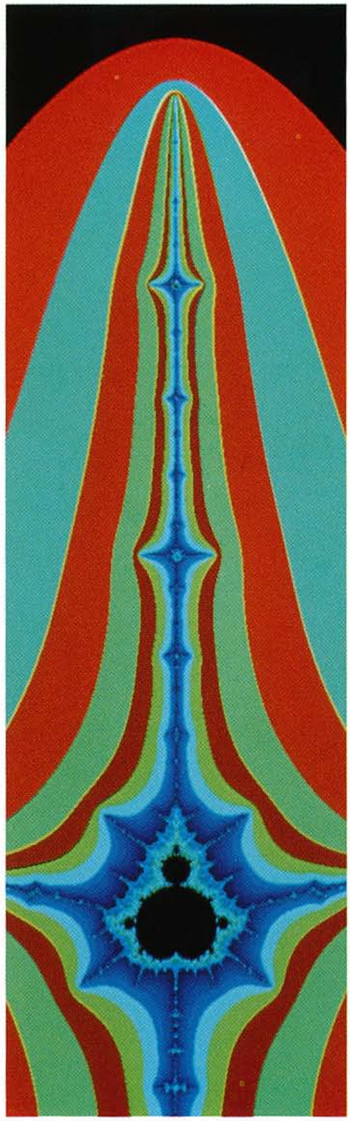
Im Grunde genommen ist sie auch unmöglich darzustellen, jeder Versuch ein Behelf. Um so erstaunlicher, was Escher aus der Kleinschen Fläche gemacht hat. In der *Galerie*, Abbildungen 3.1 und 3.2 erkennt man das Bild, das über sich hinauswächst, zur Galerie wird, in der es hängt – und wieder in sich zurückkehrt.

[18] *David Hilbert/Stefan Cohn-Vossen*
Anschauliche Geometrie
Berlin 1932, Julius Springer

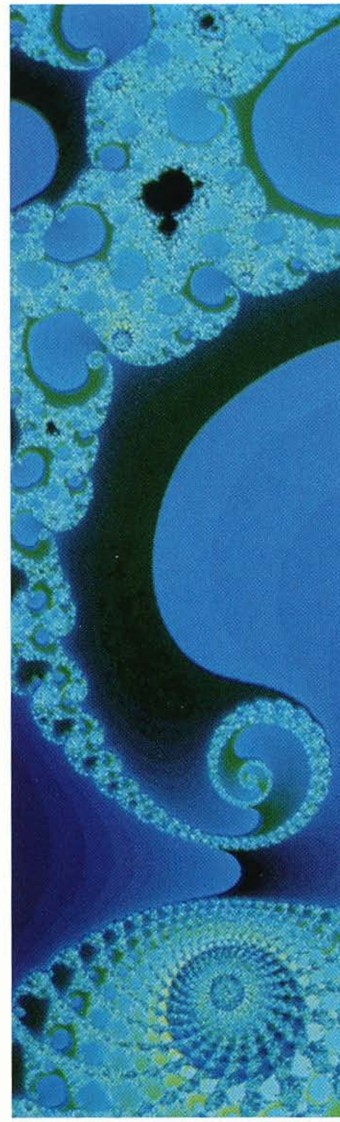


1.1

1.2



2



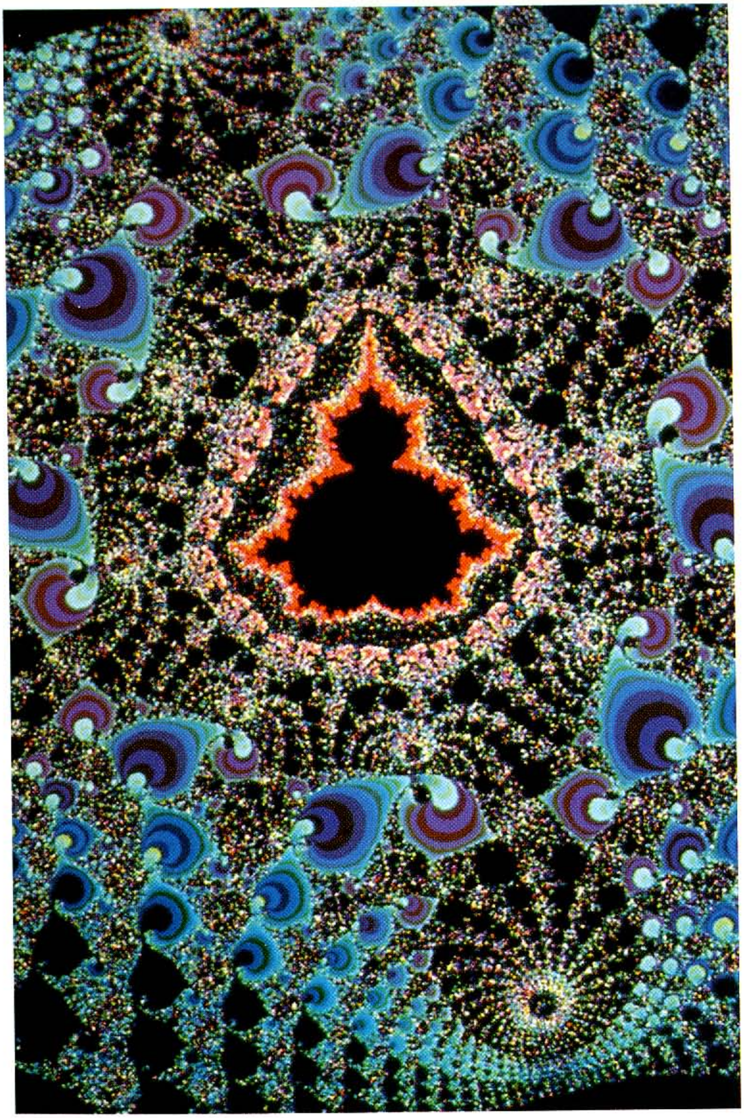
3

Fraktale Geometrie

Alles in der Natur formt sich wie Kugel, Kegel und Zylinder – der programmatische Satz Paul Cézannes, der dem Kubismus auf die Sprünge und zum Namen verhalf – und insgesamt der Kunst einen Neubeginn bescherte, er stimmt nicht.

Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Baumstämme keine Zylinder. Die Naturformen unterscheiden sich in ihrer Komplexität kategorisch, nicht nur graduell, von den Formen aller bisherigen Geometrie. Sagte sich Benoit B. Mandelbrot und entwarf eine neue, eine Geometrie der Natur, um Naturformen und -vorgänge zu beschreiben. Er taufte sie Geometrie der Fraktale.

Als Grundmuster dienten ihm Gebilde, die vor rund hundert Jahren aus Spass an der Freude entwickelt wurden, ‚pathologische' Fälle der Geometrie, sogenannte Monster, die sich dem klassischen Dimensionsbegriff entziehen. Zum Beispiel die Küstenlinie einer Insel, die viel-



4

leicht auf der Landkarte ein Kreis, in Wirklichkeit eine Form mit vielfach zerklüftetem Umriss ist.

Und bei genauerer Beobachtung wird sich zeigen: dass jeder Felsbrocken, jeder Stein, ja: jedes Sandkorn bei der Bestimmung der wirklichen Länge zählt. Je genauer die Beobachtung, desto schwieriger ist es, diese Länge zu messen. Die Küste ist unendlich lang, ihre Oberfläche Null. Sie ist mehr als ein-, aber weniger als zweidimensional. Nach Mandelbrot ist ihr deshalb nicht eine ganzzahlige, sondern eine gebrochene, das heisst fraktale Dimension zuzuordnen. Damit entpuppt sie sich als Monster.

Diese fraktale, die Zwischendimension, ist determinierend für Formen und Formstrukturen in aller Natur. In den Grenzbereichen, Grenzwerten, Grenzverläufen manifestiert sich ihre immense Komplexität; in den Phasenübergängen, wo eine Qualität in eine andere umschlägt, wo ein Aggregatzustand in den andern wechselt; in den Fluktuationen und Turbulenzen, zwischen Statik und Dynamik. Dem wollte Mandelbrot auf die Spur kommen.

Die Methode, die er anwandte, ist die Rückkoppelung; die Wirkung von Folgen eines Geschehens auf das Geschehen selbst. Er fand dabei eine bizarre Figur, das Apfelmännchen, das man sich wie die Insel vorstellen muss. Auf der Landkarte ein endlicher Kreis, Abbildung 1.1 – mit unendlich filigranem Umriss, Abbildung 1.2.[19]

Mandelbrot entdeckte ein fundamentales System: verblüffende Gesetzmässigkeiten, nach denen einfache Mechanismen äusserst komplexe Muster entfalten, die ihrerseits wieder und wieder äusserst komplexe Muster entfalten, denen immer wieder das Apfelmännchen – auch *Mandelbrot-Menge* genannt – zugrundeliegt. Auf diese Weise manifestiert sich Selbstähnlichkeit des Ganzen mit seinen Teilen, Geometrie als Modell biologischer Organisationsprinzipien, eine Analogie zum Bauplan von Lebewesen.[20]

Mandelbrot versteht seine Geometrie als Bindeglied zwischen euklidischer und aller nichteuklidischen Geometrie. Er schreibt: ‚Während die erste Ordnung bis zum Exzess bedeutet, ist die zweite völlig chaotisch'. Die fraktale ist eine Geometrie zwischen Ordnung und Chaos.

Möglich geworden waren diese Forschungen im Bereich der experimentellen Mathematik dank moderner Computer. Sie bringen zur Anschauung, machen der Intuition zugänglich, was wegen seiner Komplexität nicht mehr zu denken ist. Sie stellen konkrete Bilder dessen her, was bisher ein strikt gehütetes Geheimnis der Natur war: dass es zwischen Ordnung und Chaos Harmonien von nicht gekannter Komplexität gibt.

Und damit wird ein – auch für Mandelbrot ganz und gar unerwarteter – Grenzbereich erschlossen: zwischen Wissenschaft und Kunst.

Abbildung 2 zeigt eine Vergrösserung von Bereich A, aus Abbildung 1.2; Abbildung 3 eine Vergrösserung von Bereich B; Abbildung 4 eine Vergrösserung aus Abbildung 3. Man erkennt darin wieder das Apfelmännchen.[21]

[19] *Heinz-Otto Peitgen/Peter H. Richter Morphologie Komplexer Grenzen Bremen 1984, Universität*

[20] *Benoit B. Mandelbrot The Fractal Geometry of Nature San Francisco 1982, W.H. Freeman*

[21] *IBM Forschungsinstitute Yorktown Heights und Sindelfingen*