Angeregt von Paul Klee und Manfred Mohr
Bewegungen im Hyperwürfel und auf der Bildfläche

Susanne Grabowski, Anja Hashagen, Matthias Krauß, Frieder Nake*
Universität Bremen, Informatik

Das Zeichnen, obwohl es vordergründig eine handwerkliche Tätigkeit sei, erweise sich dennoch bei genauerer Betrachtung als „eine vor allem intellektuelle Handlung“, schreibt Domenico Laurenza, auf Giorgio Vasari Bezug nehmend, in der Einleitung zu einem erstaunlichen Buch über die Entwürfe zu Maschinen, die Leonardo da Vinci hinterlassen hat (Laurenza et al. 2005:11). Dieses Buch bringt virtuelle Konstruktionen von 32 Maschinen. Sie wurden computergrafisch aus Textfragmenten und Skizzen entwickelt, die sich in Leonardos Manuskripten finden. Die Kraft der veranschaulichenden Skizze als Mittel der Beschreibung einer technischen Konstruktion führt der schöne Band überzeugend in opulenten Bildern vor Augen.

Manch ein anderer schon hat Geräte und Maschinen nach Leonardos Skizzen gebaut und ausgestellt. Manches davon, so heißt es bei Laurenza, entspräche nicht besonders getreu den originalen Vorgaben. Immerhin bleiben die Skizzen und Konstruktionen, ihren Zwecken gemäß, der uns sinnlich und körperlich zugänglichen dreidimensionalen Welt verhaftet. Und dennoch hat da Vinci der Zeichnung gegenüber dem Holzmodell den Vorzug gegeben, obwohl sie abstrakter und reduziert ist. Die Zeichnung, sagt Laurenza, „ist mehr als ein einfaches räumliches Modell: um sie zu verstehen, bedarf es eines theoretischen Hintergrundwissens“ (ebda., 13). Die Zeichnung, mag das heißen, ist sehr wohl ein geeignetes Mittel der Anschauung über eine Sache (hier eine Maschine). Doch in sich allein mag sie noch nicht zum Verständnis führen, dieses verlangt zusätzlich nach einer Theorie.

Um wieviel mehr muss die Reichweite der Zeichnung beschränkt bleiben und erst im Zusammenspiel mit einer abstrakteren, von Vornherein geistigen Ebene ihre Aufgabe erfüllen, als wir das gewöhnlich annehmen, wenn die Anlass gebenden Gegenstände der Untersuchung nicht sichtbar sind und auch nicht sichtbar sein können, da sie mehrdimensionalen Räumen angehören. Mit solch einer Situation wollen wir uns in diesem Beitrag befassen. Wir werden jedoch bewusst nicht vom Sichtbarmachen des Unsichtbaren reden, jener beliebten Formel aus der Kunst und aus der wissenschaftlichen Visualisierung. Wir wollen das Verhältnis von Geometrie zu Grafik aus einem anderen Blickwinkel beleuchten, aus einem, wie wir meinen, zutreffenderen als gewöhnlich der Fall.

Einstimmung

Die Geometrie befasst sich mit den messbaren Formen und ihren Strukturen in Ebene und Raum. Ihre elementaren Gebilde sind Punkte, Geraden und Ebenen. Später werden sie komplexer und zahlreicher. Sie geben Anlass zu Messungen von Winkeln, Längen, Flächen- und Rauminhalten. All das sind Abstrakta: sowohl die Formen wie ihre Strukturen und Maße sind abstrakt. Nichts davon können wir sehen. In der Schule und im Alltag jedoch hört man gelegentlich, wenn die Rede auf die Mathematik kommt, dass das Rechnen und die Algebra schwierig, weil unanschaulich seien, mit der Geometrie dagegen verhalte es sich

* Auch Hochschule für Künste Bremen, Digitale Medien

anders, die sei wenigstens *anschaulich*. Unsere These vom Charakter der Geometrie leugnet dies.

Wenn Geometrie unsichtbar ist und von Strukturen handelt, kann sie nicht anschaulich sein. Die Darstellende Geometrie erst stellt das sichtbar dar, was Gegenstand der Geometrie ist. Sie geht schon in ihrem Begriff davon aus, dass Geometrie im engeren und eigentlichen Sinne eine rein geistige Vorstellung ist, wie alles andere in der Mathematik auch. Die Darstellende Geometrie dagegen stellt eine Brücke her, indem sie die Transformation von Geometrie in Grafik behandelt.

Geometrie und Grafik sind aufs Schönste dialektisch auf einander bezogen, und die Darstellende Geometrie kümmert sich um die Beziehung der beiden zu einander. Was in der Geometrie ein Kreis ist – also eine geschlossene Kurve von konstanter positiver Krümmung – das wird in der Grafik zu einer feinen oder dicken, aufgerauten oder relativ glatten, schwarzen oder roten, von allerlei Zufälligkeiten der verwendeten Materialien und Werkzeuge abhängigen Linie, zum Strich. Der Strich hat seine ganz eigene, besonders reizvolle Qualität als sichtbares Gebilde. Nur hat er zunächst und radikal gesprochen mit den Idealisierungen der Geometrie nichts zu tun. „Kurve"– so könnte der geometrische, abstrakte Begriff der *Vor*stellung, „Linie" aber der grafische, konkrete Begriff der *Dar*stellung lauten. Auf Flächen können wir solches Reden fortsetzen.

Im Tagungsband der Hannoveraner Tagung der DGfGG von 2005 finden wir nun einen Aufsatz unter dem Titel „Anschauliche Geometrie". (Lengyel 2005). Er beginnt mit den Worten „Der Erfolg der Darstellung hängt von ihrer Anschaulichkeit ab". Die Bedeutung der Anschaulichkeit einer Darstellung zeige sich im beruflichen Alltag, hier in dem von Architekten, doch fraglos auch im Berufsleben von Produktdesignern und anderen Zeitgenossen.

Die unsichtbare Geometrie, die als Vorstellung der materiellen (und also sichtbaren) Konstruktion vorausgehen mag, die aber auch aus eindringlichem Betrachten eines Gegenstandes als idealisierende Vorstellung erst gewonnen werden mag, diese unsichtbare Geometrie also wird mittels Darstellung in der Grafik sichtbar gemacht. Die idealen, rein mentalen Gegenstände werden quasi durch Verschmutzung materialisiert. Sie erfreuen viele von uns gerade hierdurch: die Darstellung siegt über die Vorstellung, hilft ihr auf die Sprünge, wie umgekehrt unsere Vorstellung dazu bereit ist, in einer offensichtlich nicht sonderlich konstant gekrümmten Darstellung einen Kreis zu „sehen" (d.h. eigentlich: ihn zu denken).

Jedoch sagt uns die Autorin des zitierten Beitrages, die Sichtbarkeit als solche sei noch nicht das, worauf es ankäme. „Anschaulich" nämlich müsse es darüber hinaus sein. Sie gibt Beispiele Darstellender Geometrie, bei denen der ungeübte Blick durchaus Schwierigkeiten haben kann. Ihr Vorhaben ist eines zur „Neustrukturierung der Geometrielehre". Dazu teilt sie uns mit: „‘Anschauliche Geometrie‘ soll die Geometrie so anschaulich machen, daß sie nicht nur nicht mehr vergessen wird, ...", sondern darüber hinaus heilsam beim Entwerfen wirken kann.

Können wir uns beim Verhältnis von Geometrie und Grafik also noch einigermaßen an die ohnehin von niemandem überprüfbare *Vor*stellung halten, die die nach standardisierten Methoden gewonnene *Dar*stellung liefert, so betreten wir mit der Kategorie der „Anschauung" pragmatische Gefilde. Jetzt erst geht es recht eigentlich los mit der Grafik. Der Grafik-Designer wird sich vorher, bei der puren Sichtbarmachung, noch ganz im

Gefängnis der Mathematik gesehen haben. All die tollen Werke der grafischen Gestaltung türmen sich nun auf und rücken der Geometrie kräftig auf den Leib, die allerdings ihren Ort im Kernbereich des Geschehens nicht räumt.

Wir zählen und wir zeichnen. Und das seit alters her. Die Begegnung des Menschen mit der Welt, die wohl auf seiner Fähigkeit zum Denken beruht, also auf der Fähigkeit zum Eindringen und Wegnehmen, zum Verallgemeinern und zum Abstrahieren, zum Annähern und Weggehen, diese Fähigkeit zum Denken entfernt den Menschen aus der Welt, zu der er dennoch bleibend gehört. Einmal entfernt und dieser Tatsache gewahr werdend, zählt er die Häupter seiner Lieben und der Schafe, zeichnet er als Linie, was sich draußen als Nahrung bewegt. Das digitale und das analoge Prinzip, die Zahl und die Form der Schafe oder Ziegen erscheinen als erste Methoden und Produkte geistiger Art, so können wir uns das vorstellen.

Das Wahrnehmen und das Denken sind seither mit den Menschen und sie betrachten, je nach ihrem Ort in der Gesellschaft, mal das eine und mal das andere als wichtiger oder richtiger oder lebens- und erstrebenswerter und haben doch damit eher Unrecht: das eine *und* das andere, so herum wird es wohl richtig. „Ohne Anschauungsvermögen“, schreibt Rudolf Arnheim, „[ist] keinerlei produktives Denken auf irgendeinem Gebiet möglich“ (Arnheim 1977:15). Sein Buch heißt auf Deutsch in seiner eigenen Übersetzung „Anschauliches Denken“. Das englische Original trägt den blasseren Titel „Visual Thinking“.

Wenn wir sehen wollen, müssen wir *hin*sehen. Wenn wir schauen, was ja vielleicht schon mehr ist als sehen, schauen wir *an*.

Die grandiose Fähigkeit des Menschen, die sich aus seiner unwiederbringlichen Entfernung aus der Unmittelbarkeit der Natur, aus der Ganzheit des puren Lebens ergibt, ist diese fortwährende, nie endende, zu Leid und Lust Anlass gebende Bewegung zwischen Sehen und Denken, zwischen Wahrnehmen und Wahrsetzen, zwischen Sinnen und Sinn, zwischen Erleben und Erkennen, oder wie noch anders wir das ausdrücken wollen. Klar ist, dass ein solches trennendes Reden bereits dem analytischen Sezieren auf den Leim gekrochen ist, dem die romantisch ersehnte große Einheit zuwiderläuft. Beide Haltungen und Handlungen zusammen erst beleuchten Seiten dessen, wie wir anschauen[1].

Grafik also *sehen* wir. Geometrie *denken* wir. Der sinnlichen Dimension menschlicher Existenz gehört die Sichtbarkeit, der geistigen aber die Denkbarkeit an. Rudolf Arnheim will in seinem Buch nicht glauben, dass die Kunst etwas so völlig Fremdes zur Wissenschaft sei. Er ist vielmehr überzeugt davon, wie er uns mitteilt, dass „das künstlerische Schaffen eine Erkenntnistätigkeit ist, in der sich Wahrnehmen und Denken untrennbar vereinen“ (S. 9) Wer wollte dem ernsthaft widersprechen?

Die Betonung liegt dabei gewiss auf *untrennbar*. Und doch, indem wir diese eine Tätigkeit des künstlerischen Modellierens nach zwei Seiten hin anschauen und beiden Seiten auch unterschiedliche Namen geben, trennen wir sie doch. Wir tun das sogar, so zeigt sich im Laufe der Geschichte, gern und mit Gewinn. Es fragt sich vielleicht nur, mit welcher Art von Gewinn und bei welchem Verlust.

---

[1] Es versteht sich, dass im Rahmen dieses Beitrages für einen Zweck, wie dieser Band ihn verfolgt, ein Eingehen auf die Problematik der naiv so hoch gehandelten Anschauung nicht geschehen kann. Immerhin ist die Anschauung den Grundlagen der Mathematik seit Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts verdächtig, weil in sich widersprüchlich. Naiv also ist in erster Linie unsere Position zu nennen. Empfehlenswert hierzu: Yourgrau 2005, insbes. Kap. 4.

Wir wollen in diesem Beitrag mit einer kleinen Beispielserie daran ansetzen, dass nicht zu trennen ist, was eines ist: die Sinne und der Sinn, für deren Zusammenwirken das schöne Wort „Anschauung“ stehen mag. Wir wählen unseren Ausgang bei Kunstwerken von Manfred Mohr (geb. 1938) und Paul Klee (1879-1940). Die Werke von Manfred Mohr besitzen algorithmische Identität, die in ihren farbigen Flächen nicht sofort wahrgenommen werden wird (Abb. 1). Das Werk von Paul Klee hat einen Titel, der uns sofort anders über die Linien und Farbflächen nachdenken lässt, die wir sehen (Abb. 2).

Wir wollen über Bewegungen sprechen, die wir mit Hilfe von Algorithmen, Programmen und Computern interaktiv auslösen können und die in ihrer manipulierten Sichtbarkeit unser Denken über das, was wir sehen, berühren.

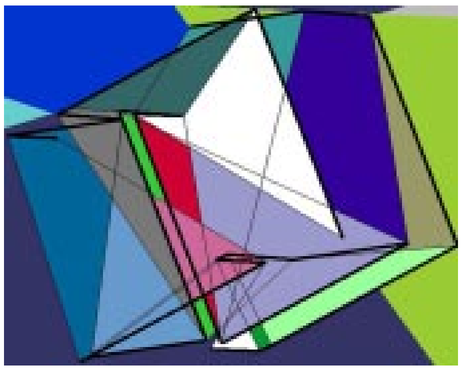

Abb. 1. Paul Klee, Hauptweg und Nebenwege. 1929. Ölfarbe auf Leinwand, 83.7 x 67.5 cm. Museum Ludwig, Köln (links)

Abb. 2. Manfred Mohr, P-702/F. 2000. Endura Chrome, Leinwand auf Holz, 76 x 100 cm. Privatbesitz (rechts)

„Kunst gibt nicht das Sichtbare wieder, sondern macht sichtbar“, lautet ein berühmter Satz von Paul Klee aus dem Jahr 1920 (Klee 1990:76). In diesem Satz fühlen wir das ganz aufgehoben, was wir hier zeigen (im Vortrag bei der Tagung) bzw. schreiben (in diesem Text). Wir können, der Symmetrie wegen, Klees Satz paraphrasieren: „Wissenschaft gibt nicht die Wirklichkeit wieder, sondern macht vorstellbar.“

Wir zeigen im Folgenden am Beispiel dreier Programme, wie mit Hilfe des Computers – den wir als algorithmisches (digitales) Medium begreifen (Schelhowe 1997, Robben 2006) – zeichnerisch mit Dingen und Verhältnissen so umgegangen werden kann, dass unsere Vorstellung beeinflusst und gefördert werden kann, gerade auch dann, wenn es um Unsichtbares geht. Die bildende Kunst, unser Beispielfeld, handelt vom Verhältnis des Sichtbaren zum Unsichtbaren. Sie ist keine allzu ferne Verwandte der Geometrie. Um die Kunst selbst aber geht es in diesem Beitrag nicht.

Auf dem Rand des Hyperwürfels

Den Würfel in drei Dimensionen kennen wir anschaulich und handgreiflich aus dem erlebten Raum. Der Würfel in mehr als drei Dimensionen kommt nur im mathematischen Raum vor. Wir können ihn uns mathematisch sehr gut und genau vorstellen. Zeigen aber können wir ihn nicht, sobald es um mehr als drei Dimensionen geht. Was wir sichtbar machen können, sind Verhältnisse, die ihn betreffen. Genauer gesagt: wir können Grafiken erzeugen, die wir als Veranschaulichung solcher Verhältnisse interpretieren. Besonders günstig sind dafür animierte und interaktive Grafiken.

Im Programm *Dimensions of Cubes*, im Rahmen einer Diplomarbeit entstanden (Hashagen 2006), geht es um die Struktur des n-dimensionalen Würfels W_n, genauer: um die Struktur von dessen Rand[2]. Wir fassen, wie üblich, den W_n auf als jene Menge des R_n, die in jeder der n Raum-Dimensionen durch ein Intervall gleicher Länge bestimmt wird (wir wählen das Intervall von -1 bis 1). Die beiden Enden jedes dieser Intervalle sind durch Würfel W_{n-1} der Dimension n - 1 begrenzt. Dies ergibt eine rekursive Definition des W_n. Bei $n = 3$ holen wir die Anschauung wieder ein: die drei Intervalle werden hier durch Quadrate (d.h. Würfel der Dimension 2) begrenzt.

Wir rufen einige einfache Fakten über den W_n ins Gedächtnis. Der Rand (die „Oberfläche") des W_n besteht aus $2n$ Würfeln der Dimension n - 1. Der W_n besitzt 2^n Eckpunkte, d.h. Randbestandteile der Dimension 0. Paare solcher Punkte sind durch $2^{n-1}\, n! / (n - 1)!$ Kanten miteinander verbunden (Banchoff 1990:76). In jedem Eckpunkt des W_n treffen n Kanten aufeinander.

Dimensions of Cubes zeigt eine Projektion des W_n in ständiger Rotation, die beschleunigt, verlangsamt und angehalten werden kann. Wir gehen dabei davon aus, dass erst durch solch eine Rotation das sichtbar gemachte Geschehen sinnvolle Interpretationen erlaubt. Die Rotation im R_n findet um einen invarianten Unterraum R_{n-2} statt. Der R_n hat $n\,(n - 1) / 2$ Koordinaten-Unterräume der Dimension n - 2 wie auch der Dimension 2 (gemäß der Anzahl von Möglichkeiten, aus n Elementen n - 2 bzw. 2 auszuwählen).

Für die Berechnung des nächsten Bildes einer animierten Rotation nutzen wir die bekannten Vorteile der Darstellung geometrischer Transformationen durch homogene Koordinaten aus.

Der in New York lebende deutsche Künstler Manfred Mohr ist einer der ersten, der sich ganz auf die Verwendung von Algorithmen für seine Kunst verlegt hat. Seine malerische und grafische Entwicklung hatte konsequent zu immer strengeren konstruktiven Formen geführt, sodass er bei seiner ersten tatsächlichen Berührung mit einem Computer in Paris 1968 geistig vorbereitet war, den Schritt zur algorithmischen Kunst zu tun. Einzelheiten interessieren uns hier nicht. Bedeutsam ist, dass nach einigen Einzelstudien bald der Würfel zu seinem Thema und Gegenstand wurde – in drei Dimensionen zuerst, dann in vier, fünf und sechs, heute in elf Dimensionen.

Mohr geht es nicht darum, didaktisch etwas zu veranschaulichen, das als Interpretation jener Dimensionen durchgehen könnte. Sein Thema ist vielmehr die hochgradige Symmetrie des Würfels bzw. deren Störung und Brechung mit ästhetischen Mitteln. Algorithmisch legt er ein Geschehen fest, das als Programmablauf zu Formen und Farben auf der Fläche des Bildes führt. Seine Zeichen (früher *êtres graphiques* genannt) zeichnen sich durch klare Linien und

[2] Wir sprechen durchgängig von „Würfel", auch wo es üblicherweise „Hyperwürfel" heißen sollte.

Flächen konstruktiver Anmutung aus. Er weiß von ihnen genau, welchem rigoros präzisen Ablauf sie ihre Existenz schulden, auch wenn dieser Ablauf selten auf den ersten Blick, oft vom Uneingeweihten gar nicht zu erkennen ist.

Mohr programmiert seine Algorithmen selbst und lässt längst ihre Ergebnisse auf dem Bildschirm anzeigen. Realisiert werden seine Werke auf Leinwand, mit unterschiedlichen plastischen Materialien, heute auch als Animation auf einem kleinen Flachbildschirm. Eine wichtige Rolle spielen bei Mohrs ästhetischen Prozessen Pseudo-Zufallszahlen. Den Zufall nutzt er, um „ästhetische Unabhängigkeit vom Stereotypen und Vorurteilsbehafteten" zu erlangen (Keiner 1994:65).

Dimensions of Cubes nimmt keinen unmittelbaren Bezug zu Manfred Mohrs Kunst. Auf sie kommen wir im nächsten Abschnitt zurück. Hier gaben Mohrs Werke nur die Motivation für ein Programm, das in eher didaktischer Absicht interaktiv einige Aspekte des Randes des rotierenden W_n beeinflussen lässt. So kann der Betrachter einen oder zwei sog. Diagonalwege (s. unten) hervorheben lassen. *Abb. 3* zeigt links ein Werk von Mohr, das Diagonalwege des W_6 in Lasertechnik auf Stahlplatte realisiert. Rechts enthält die Abbildung in unterschiedlicher Färbung zwei Diagonalwege, die mit *Dimensions of Cubes* erzeugt worden sind (Momentaufnahme).

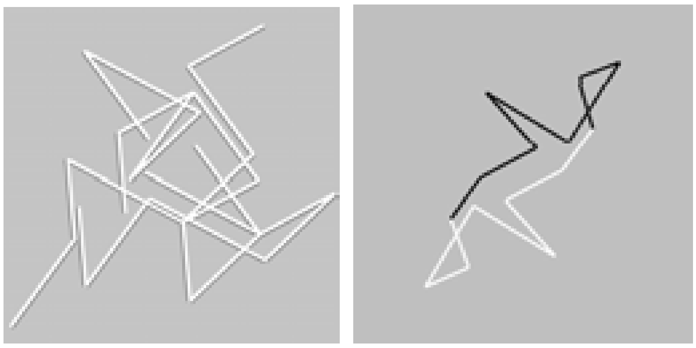

Abb. 3. Links: Manfred Mohr, P-486-O. Stahl, lackiert, 1992. 122 x 72 x 0.32 cm.
Rechts: Dimensions of Cubes. Zwei Diagonalwegen zwischen gleichen Eckpunkten

Gemäß unserer generellen These von der geistigen Vorstellung und der sinnlichen Sichtbarkeit ermöglicht *Dimensions of Cubes* es, innerhalb bestimmter Schranken den Rand des W_n zu untersuchen. Genauer gesagt: in einer Darstellung der Projektion des rotierenden W_n auf die Bildebene kann der Betrachter einige ausgewählte Untergebilde hervorheben lassen. Solche sind z.B. die zum Rand gehörenden $W_{n\text{-}1}$, von denen wiederum Paare von sich gegenüberliegenden interessant sein können (*Abb. 4*).

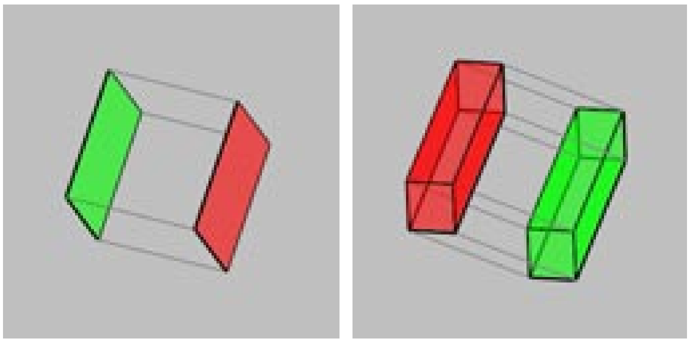

Abb. 4. Links: Dimensions of Cubes. Zweidimensionale Würfel auf dem Rand des dreidimensionalen Würfels. – *Rechts:* Dimensions of Cubes. Dreidimensionale Würfel auf vierdimensionalem Würfel, in Projektion

Die Struktur des dreidimensionalen Würfels ist aus dem Alltag gut bekannt. Im Analogieschluss kann ein Betrachter von ihr auf den vier- und weiter auf den fünfdimensionalen Fall übergehen. So, wie einiges dafür spricht, die (*n* - 1)-dimensionalen Würfel des Randes hervorzuheben, so spricht umgekehrt manches dafür, sich an die vertrauten drei- und zwei-dimensionalen Randgebilde zu halten und sie zu anderen Darstellungen zu benutzen. *Abb. 5* zeigt eine Reihe von *n*-dimensionalen Würfeln mit hervorgehobenen dreidimensionalen Würfeln, *Abb. 6* gibt ein entsprechendes Bild mit zweidimensionalen Randteilen. Die Farbgebungen geschehen automatisch.

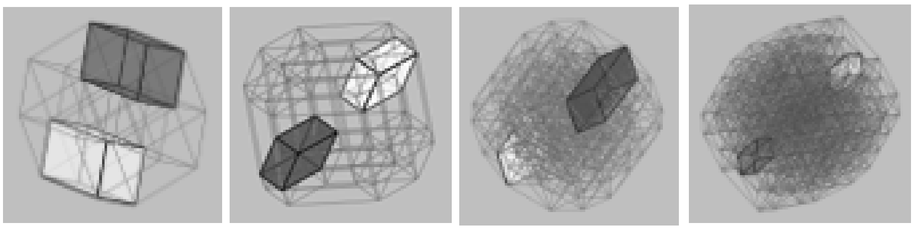

Abb. 5. Würfel der Dimensionen 5, 6, 8, 10 mit hervorgehobenen 3D-Würfeln

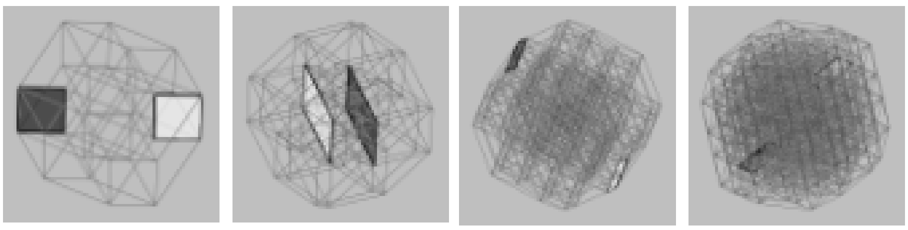

Abb. 6. Würfel der Dimensionen 5, 6, 8, 10 mit hervorgehobenen 2D-Würfeln

DeviceX

Die Visualisierung des Programms *Dimensions of Cubes* kann geometrische Prinzipien von Hyperwürfeln nachvollziehbar machen. Dennoch wird es kaum möglich sein, höherdimensionale geometrische Räume zu *begreifen*, sie intuitiv zu verstehen.

Höherdimensionale Räume scheinen für unsere unmittelbare visuelle Anschauung – so die eine Seite unserer These – unzugänglich zu sein.

Noch schwieriger wird es mit dem Verständnis aus der Betrachtung des Sichtbaren allerdings bei dem, was Manfred Mohr in seinen künstlerischen Werken vom Hyperwürfel übrig lässt. Mohrs erklärtes frühes Ziel ist die Dekomposition und Zerstörung der Symmetrie des Würfels. Im Laufe der vielen Entwicklungsjahre spielt die Symmetrie nicht mehr die vordergründige Rolle. Ein abstrakteres semiotisches Prinzip tritt an ihre Stelle: „Das Zeichen muss sich vom logischen Inhalt visuell loslösen können, um sich dann, als abstrakte Form, alleine zu behaupten" (Mohr 2006a). Ein Reiz der Werke Mohrs liegt in der in ihnen verborgenen Aufforderung, die zugrunde liegende Struktur wieder zu finden und zu ahnen (oder gar zu rekonstruieren), wie sie algorithmisch zerstört wurde.

Diese Aufgabe war in seinen frühen Werkphasen *Cubic Limit* (1973 bis 1976) und *Divisibility* (1980 bis 1986) noch recht einfach anhand der Bilder selbst und eines erklärenden Textes zu bewältigen (s. Keiner et al. 1994). Diese Arbeiten basieren auf dreidimensionalen Würfeln, die meist gedreht und deren Projektionen beschnitten werden. Im weiteren Verlauf seiner Arbeiten steigen sowohl die Zahl der Dimensionen als auch die Variationsbreite der Operationen, mit denen Mohr den Hyperwürfel demontiert. In der Werkphase **space.color** verwendet er sechsdimensionale Hyperwürfel, von denen er lediglich einige Kanten für die weitere Bildkonstruktion auswählt:

> Diese geometrisch festgelegte Struktur hat 32 Diagonalen. Die Endpunkte einer jeden Diagonale liegen sich diametral in der Struktur gegenüber. Verbindet man solche diametralen Punkte durch das komplizierte Netzwerk von Verbindungslinien, erhält man einen ‚Diagonal-Weg' [...] Zu jeder Arbeit werden [...] vier durch den Zufall ausgewählt [...] und von 1 bis 4 geordnet. Die korrespondierenden Vektoren werden untereinander mit dünnen Linien verbunden. Es entstehen Vektorenpaare, die zusammen mit den dünnen Linien, Planvierecke bzw. Farbfelder ergeben [...] Die beiden äußeren ‚Diagonal-Wege' (1 und 4) werden ohne dünne Linien auf dieselbe Weise verbunden – aber über den Bildrand hinaus und über der Rückseite des Bildes verspannt. (Mohr 2001)

Mohr verwendet in diesen Bildern erstmals nach rund dreißig Jahren wieder Farbe: „Die stetige Zunahme an Komplexität in meiner Arbeit zwang mich, das von mir verwendete binäre System s/w zu verlassen, um mich visuell inhaltsgerechter ausdrücken zu können." (Mohr 2006b)

Auch mit weiteren Erklärungen und einer schematischen Darstellung, die Mohr als Hilfestellung zum Verständnis gibt, ist es nicht leicht, die Bildhaftigkeit und den zugrunde liegenden Algorithmus zu verstehen – was einerseits enttäuscht, andererseits aber motiviert, den Bildern ihr algorithmisches Geheimnis zu entlocken.

Unser Programm *DeviceX* ist ein Versuch, Interessierten bei der Entschlüsselung dieser Werke medial und interaktiv zu helfen. Das Programm zeigt in seinem Hauptteil einen dreigeteilten Bildschirm (vgl. *Abb. 7*): Links unten ist ein Gebilde zu sehen, das stark an Mohrs Werke der Phase **space.color** erinnert. Tatsächlich entsteht es durch den gleichen Algorithmus, den Mohr für seine Bilder verwendet. Das Gebilde verändert sich allmählich, weil der zugrunde liegende Hyperwürfel langsam rotiert. Die gewählten Diagonalwege und Farben bleiben dabei erhalten. Eine ähnliche Art der Bewegung verwendet Mohr in seiner anschließenden Werkphase **space.color.motion** (2002 bis 2004).

Unten rechts im Bild von *DeviceX* ist eine Gitterstruktur zu sehen, deren Gitterfelder die gleichen Farben enthalten wie die unregelmäßigen Flächen im linken Gebilde. Es handelt sich um die Gitterstruktur, die Mohr im obigen Text erwähnt. Oben links ist schließlich eine verkleinerte Version des Bildes darunter zu sehen.

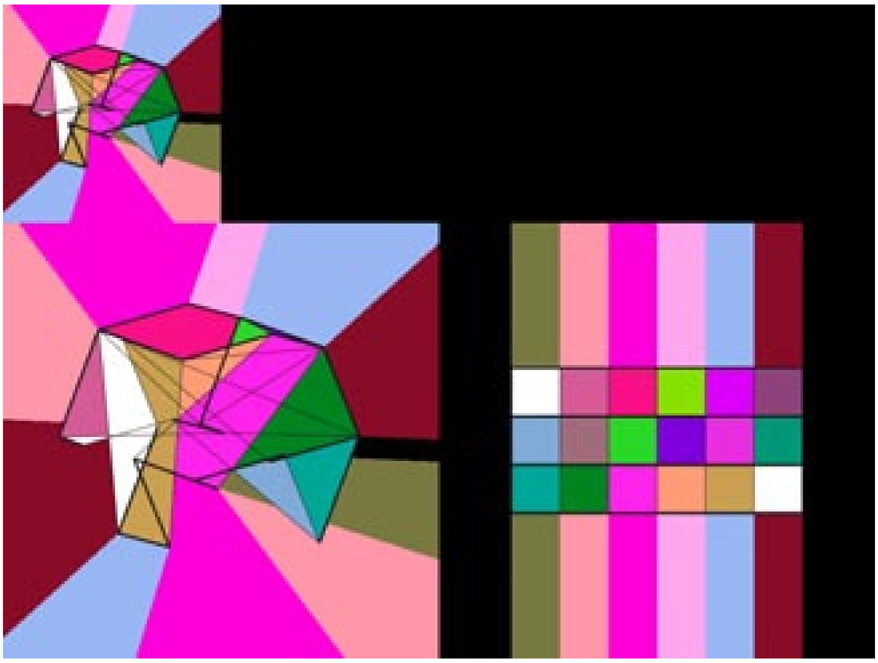

Abb. 7: DeviceX im Grundzustand (links das eigentliche Bild, rechts seine Struktur, oben der Schieber, vgl. Text)

Ohne noch in das Geschehen, das sich auf dem Bildschirm bietet, einzugreifen, können wir die Bewegung betrachten, ihre Drehung beschleunigen, verzögern oder anhalten oder auch eine neue, zufällige Auswahl von Diagonal-Wegen und Farben auslösen. Wir können weiterhin Flächen oder Kanten durch Klick markieren, um sie so besser verfolgen zu können. Die Darstellung der markierten Elemente pulsiert farbig, bis erneut auf sie geklickt wird. Jedes Element in der Gitterstruktur hat seine Entsprechung im linken Gebilde und umgekehrt. Das Pulsieren zeigt das entsprechende Element in der anderen Bildhälfte (und auch in der verkleinerten Version oben).

So können wir beispielsweise einen in der Gitterdarstellung leicht zu sehenden horizontalen Kantenzug dort markieren und den entsprechenden Diagonal-Weg im linken, komplexeren Bild verfolgen. Wir können auch bemerken, dass gelegentlich ein rechts sichtbares farbiges Feld im linken Teil keine Entsprechung zu haben scheint. Der Grund liegt darin, dass sich die farbigen Flächen im linken Bild überlagern können; denn Mohrs Algorithmus bestimmt die Verdeckung der Flächen bei der Projektion ins zweidimensionale Bild nicht aus ihrer räumlichen Tiefe, sondern aufgrund ihrer Reihenfolge im Gitter. Daher können Situationen entstehen, in denen eine Farbfläche vollständig durch andere verdeckt wird.

Obwohl wir mit diesen Möglichkeiten von *DeviceX* bereits einiges von der Struktur des Bildes aufspüren können, liegt das Hauptaugenmerk auf dem kleinen Bild oben. Wir nennen es den *Semantischen Schieber*. Das Bildchen nämlich lässt sich mit der Maus horizontal hin und her schieben. Während der Bewegung verändert sich der Bildinhalt fließend: ganz in der linken Position entspricht der Bildinhalt dem Resultat des mohrschen Algorithmus, ganz rechts dagegen der topologisch äquivalenten Struktur des Gitters. Die Zwischenstationen deuten an, wie ein zwischen beiden Extremen liegendes Bild aussähe.

Obwohl es sich mathematisch lediglich um eine lineare Interpolation der Eckpunkte handelt, kann dieser Übergang beim interagierenden Beobachter einen erstaunlichen Effekt bewirken. Durch den fließenden Übergang wird deutlich, dass die beiden großen Bilder strukturell identisch sind. Denn die Bewegung, die ich selbst aktiv mit meiner Hand bewirke und bei der ich beliebig zwischen zwei Zuständen hin und her wechseln kann, mir dabei ohne Verzögerung ein Bild vom Auftauchen, Verschwinden, Verdrehen, Einschnüren der Geometrie von Teil-Flächen machen kann, bei der ich langsam aus der komplexen Form links in die regelmäßig geglättete Darstellung rechts gleiten kann – diese Bewegung ist die eines Schiebereglers, der den Inhalt der Größe, die er regeln soll, selbst anzeigt, quasi auf sich selbst zeichnet.

Diesen Umstand versuchen wir mit dem Begriff vom *semantischen Schieber* auszudrücken. Er lässt erkennen, wie sich das Diagonalwege-Bild links und das Farbgitter rechts ineinander knittern und entwirren. Zudem macht die Bewegung nachvollziehbar, wo sich verdeckte Flächen befinden und warum sie links nicht sichtbar sind. Der beobachtete Effekt wirkt dadurch besonders überzeugend, dass der Betrachter die inhaltliche Veränderung durch seine eigenen Operationen hervorruft.

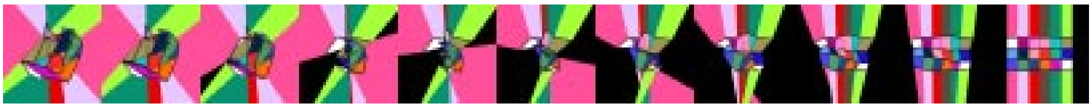

Abb. 8: Aufreihung von Momentaufnahmen einer Folge von elf Zuständen des semantischen Schiebers des DeviceX

Was wir mit *DeviceX* selbst bewirken können, ist letzten Endes die Verwandlung einer geometrischen in eine topologische Ansicht und umgekehrt. Die Schilderung des Umgangs mit dem semantischen Schieber bleibt in der Textform notwendigerweise bruchstückhaft und stellvertretend. Die unmittelbare Erfahrung, deren wir haptisch-visuell gewärtig werden, wenn wir den semantischen Schieber *in die Hand* nehmen, ist nicht ersetzbar. Wir sind überzeugt davon, dass das kleine, einfache Gerät, von dem wir hier sprechen, eine qualitativ neue Erfahrung des Verhältnisses von Vorstellung und Darstellung, von Einsicht und Anschauung, von Unsichtbar und Sichtbar ermöglicht. Wir sind davon deswegen überzeugt, weil wir die Wirkung bei vielen Menschen beobachten konnten, die Gelegenheit hatten, mit *DeviceX* zu hantieren. Sein Effekt lässt sich ausschließlich interaktiv erreichen.

Das Beispiel zeigt, dass das Potenzial interaktiver Medien qualitativ über das von anderen Visualisierungen hinaus gehen kann. Das ermutigt.

Spannung

Auf andere, deutlich komplexere Weise geschieht das Gleiche wie beim *DeviceX* in der Interaktion mit einem dynamischen Bild, das den Kern der Installation *Spannung* ausmacht, die wir als Gruppe compArt entwickelt und ausgestellt haben. Ihr gehen wir in diesem Abschnitt nach.

Der Zeichencharakter einiger Bilder von Paul Klee vom Ende der 1920er Jahre – wie etwa *Hauptweg und Nebenwege* (s. *Abb. 1*) – regte einen von uns1965 zur Entwicklung eines Programms an, dem die bekannte Computergrafik *Hommage à Paul Klee* (*Abb. 9*) entstammt. Die Strukturen seiner Liniengruppen sind von vielfältigen Spannungen durchzogen, auf die es in Anlehnung an Spannungen im Bild von Klee ankommt. Klee ließ Raum und Form fluktuieren, schichtete horizontale oder vertikale Bänder von farbigen Flächen über- und nebeneinander, erweiterte und verjüngte sie, suchte dem grenzenlosen Fließen Gestalt auf der Bildebene zu geben. Nichts beginnt, nichts endet, alles kommt und geht, tritt ein und aus: Unendlichkeit des Raumes, gedanklicher Hintergrund der Begrenzungen von Farben und Formen eines Bildes (vgl. Giedion-Welcker 1961:56).

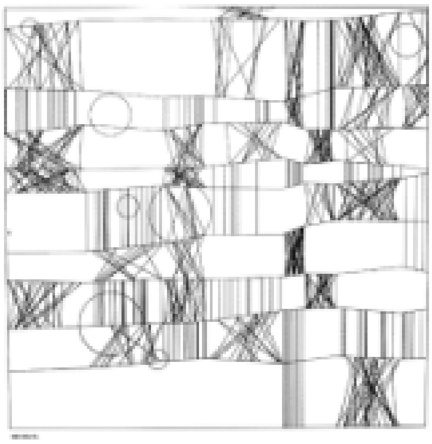

Abb. 9. Frieder Nake, „Hommage à Paul Klee“. 1965. Tusche auf Papier, 40 x 40 cm

Wo etwa zeigen sich Spannungen, wie Paul Klee ihnen Ausdruck zu geben suchte, in der Computergrafik, die seiner Kunst gewidmet ist? Zunächst in der Einteilung der Bildfläche in horizontale Bänder. Diese Bänder sehen wir durch auf- und abschwankende Linien. Ihnen stehen gegenüber vertikale Felder, die nur durch ihre Inhalte sichtbar werden. Allerdings scheinen die Knickpunkte der horizontal orientierten Linien exakt senkrecht über einander zu liegen. Wir sehen leere Felder und solche, die mit senkrechten oder schrägen Linien (tatsächlich sind es Dreiecke) gefüllt sind. Ist ein Feld mit senkrechten Linien gefüllt und das darüberliegende auch, so setzen sich die Vertikalen dort hinein fort. All diese Lineaturen und einige mehr können wir gedanklich als Spannungsverhältnisse fassen.

In einem ganz anderen Spannungsverhältnis stehen die Kreise als runde Formen zu den geraden Linien. Sie sind auch nicht an die Bandstruktur gebunden, schweben vielmehr über ihr, negieren sie. Das Raumempfinden sagt uns, dass sie über der Netzstruktur liegen mögen, was weitere Spannung zwischen die zeichnerischen Elemente bringt.

Die statische Grafik, ganz ebenso wie das Gemälde von Paul Klee, existiert auf syntaktischer Ebene lediglich als Organisation von wahrnehmbaren Lienen und Farben. Mit dem Blicken ist aber immer auch ein Deuten verbunden. Dieses erzeugt verschiedene Spannungen als interpretative Komponenten der Zeichen. Wir sehen sie nicht unmittelbar aus der Zeichnung heraus, sondern eher mittelbar in sie hinein. Dem algorithmischen Kern der programmierten Grafik aber sind sie inhärent verhaftet. Den algorithmischen Kern können wir bloßlegen. Wir können ihn in Bewegung versetzen, wenn wir die statische Grafik aus den Fesseln von Papier und Tusche befreien.

Das zeichnerische Repertoire mit seinen einfachen geometrischen Formen füllt in der Computergrafik eine logische Bildkonzeption, die die Makrostruktur der Bänder mit den Mikrostrukturen der viereckigen Felder und der Zwischenstruktur der schwebenden Kreise in Beziehung setzt. Im Einzelnen geschieht dies durch Umsetzen von Pseudo-Zufallszahlen, die nach Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmt werden, in visuelle Entscheidungen. Wir finden dies z.B. bei der Auswahl von Ort und Winkel der Knicke der horizontalen Bänder, aber auch bei der zufälligen Bestimmung all der Linienstücke einer der Mikrostrukturen..[3]

Diese Art der algorithmischen Beschreibung schafft nicht nur ein einzelnes Bild, sondern eine ganze Klasse von Werken. Aus ihr kann eine potenziell unendliche Vielzahl an Varianten und Serien gleicher Werkstruktur hervorgehen. Stellten wir solche Werke nebeneinander aus, wie das im Rahmen der Computerkunst gelegentlich der Fall war, so wendet sich der Blick tendenziell vom einzelnen Bild und seinen Elementen ab und den Ähnlichkeiten und Unterschieden von Bild zu Bild, der Bewegung des Verfahrens, zu. Wir nehmen etwas wahr, das die Bilder selbst nicht zeigen, das sie aber bedeuten. Während Spannungen beim einzelnen Bild-Ereignis auf Beziehungen zwischen den zeichnerischen Elementen beruhten, verlagern sie sich jetzt auf Beziehungen zwischen den Bildern.

Dieses bewegende Moment machen wir dadurch sinnlich erfahrbar, dass wir den algorithmischen Kern beibehalten, aber technisch neu fassen und interaktiv zugänglich machen. Das geschieht mit der interaktiven Installation *Spannung*. *Abb.* 10 und 11 zeigen die Installation.

Abb. 10. compArt (F. Nake, S. Grabowski, M. Krauß), Interaktive Installation „Spannung" in der Ausstellung *Frieder Nake: Die präzisen Vergnügen*. ZKM Karlsruhe 2005

[3] Eine genauere Beschreibung findet sich bei Nake (1974:214-220) oder Nake & Grabowski (2005:134-136).

An einem Tisch, ähnlich einem Bistrotisch, können zwei Personen mit Hilfe von Grafiktabletts interaktiv mit der Zeichnung umgehen. Im Tisch verborgen befindet sich ein Apple Macintosh. Seine Aufgabe ist es, die Orte der Stifte zu identifizieren, deren Bewegung zu interpretieren und sofort in ein verändertes Bild umzusetzen. Ein in die Tischfläche eingelassener Bildschirm, gleichzeitig aber auch eine große Wandprojektion zeigen den aktuellen Zustand des Bildes. Das Bild ergibt sich aus ständiger, stürmischer oder gemächlicher, glatter oder springender, aufbauender oder zerstörender Kombination aus visueller Wahrnehmung, interaktiver Operation und gedanklicher Interpretation. Die Betrachterin hat den Eindruck, Linien des Bildes mit ihrem Stift elastisch zu ziehen, zu bewegen, zu zerren, zu schieben, auftauchen und verschwinden zu lassen. Dadurch dass zwei Betrachter dies gleichzeitig und völlig unabhängig von einander tun können, erhöht sich der Eindruck eines spannungsgeladenen Bildes noch einmal.

Setzt ein Betrachter z.B. in zwei senkrecht über einander liegenden Feldern vertikale Linien, so werden diese von der Mikrostruktur her zwar zunächst unabhängig und zufällig bestimmt. Die im Programm verborgene Spannung lässt sie jedoch sofort so miteinander verschmelzen, dass die Vertikalen beider FelderVerlängerungen von einander werden: in der interaktiven Operation wird die Abhängigkeit von Zeichnungselementen offensichtlich.

Verborgene Spannungen erschöpfen sich aber nicht mit dem Verteilen, Setzen, Kombinieren oder Zerstören der Linieninhalte von Feldern. Auch in die Makrostruktur können Betrachter-Akteure direkt eingreifen, indem sie ganze Bänder in sich verschieben oder Eckpunkte mit der gesamten daran hängenden Zeichnung über das ganze Bild hin verziehen und in Schwingung zwingen. Dies alles wird dadurch bewirkt, dass die Elemente der Zeichnung so modelliert sind, als seien sie elastische Federn. Jede Feder befindet sich zu jedem Zeitpunkt in einem Spannungsgrad, der eine Kraft bedeutet. Ständig werden alle Linien gemäß dem augenblicklichen Stand der Kräfte neu berechnet und gezeichnet. Dies geschieht so schnell und unmerklich, dass beim Betrachter der Eindruck kontinuierlich glatter Bewegung entsteht. Lassen die Betrachtenden von ihren Manipulationen ab, so kehrt das Bild, seiner innewohnenden Logik folgend, gemächlich aus der aufgebauten Verspannung wieder in seine Urform zurück (eine Erinnerung, nebenbei gesagt, an das Schwarze Quadrat und den Kreis von Malewitsch).

Das Federmodell erlaubt das Spielen mit allerlei weiteren verborgenen, jedoch zu erwartenden Spannungen. So bewegen sich leergeräumte Bänder schneller; sie fühlen sich geradezu schlacksig an. Volle Bänder dagegen bewegen sich schwerer und gemächlicher im Bild. Ein völlig leeres horizontales Band bedeutet für die Spannungen auf der einen Seite, dass sie sich nur sehr gering auf die Bildelemente jenseits des Grabens auswirken können. Die Spannkraft der Bänder übt Einfluss auf die über dem Bild schwebenden Kreise aus. Sie werden von den gespannten Bändern angesogen. Andererseits kann jeder Kreis frei bewegt und geschleudert werden. In gemeinschaftlicher Aktion können zwei Spieler die Größe eines Kreises verändern. Sie nutzen so das Schweben über den Kräften des Bildes aus. Solch ein Agieren kann als das Austragen von Spannungen zwischen Personen interpretiert werden – gewiss eine etwas gewagte Deutung.

Manche Besucher finden Gefallen daran, die Grafik akribisch völlig aufzuräumen. Sie entleeren alle Felder oder füllen sie durchgängig mit nur senkrechten oder nur schrägen Linien. Solch ein Spieler, der gespannt einer einheitlichen Ordnung entgegensieht, wird allerdings vom algorithmischen Verfahren hinters Licht geführt: das System schlägt zurück, indem es sich beim letzen Klick der nun zu erwartenden übermäßigen Einheitlichkeit entzieht. Unter den vielleicht erstaunten Blicken des Spielers verrutscht es oder kippt weg und verwandelt sich in eine neue Bildkonstruktion der ursprünglichen Art zurück.

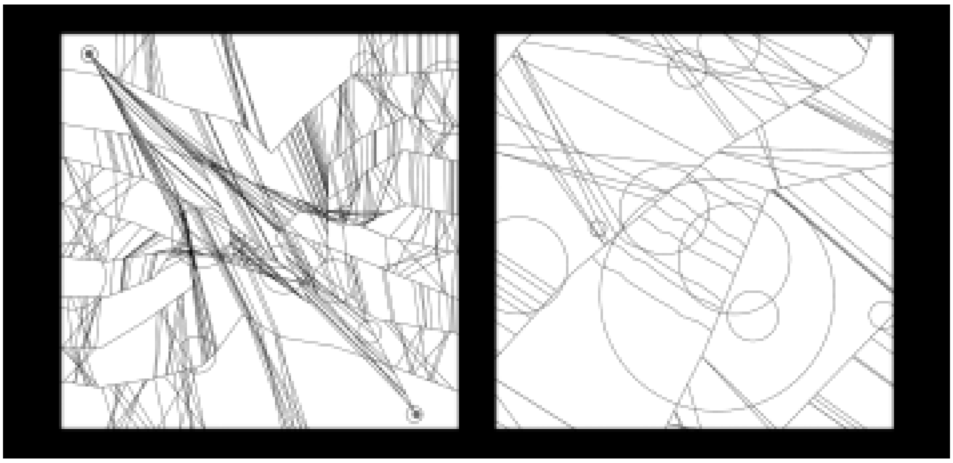

Abb. 11. Zwei Ansichten des interaktiv manipulierten Bildes von „Spannung“ (rechts ein Ausschnitt)

Schluss

Wir haben mit den Programmen der drei Beispiele versucht, Hinweise auf Verschränkungen von Grafik, Geometrie, Wissenschaft und Kunst zu geben. Ging es bei den ersten beiden Fällen – vom Gegenstand her betrachtet, der in den Bildern erscheinen mag – um mehrdimensionale geometrische Gebilde, so blieb das dritte ganz in der Bildebene. In allen drei Fällen jedoch griff der Mensch über Interaktionsgeräte in die statischen Bilder ein und konnte so – im vollen Bewusstsein seiner auslösenden und verursachenden Tätigkeit – Bildprozesse in Gang setzen. Auf Papier oder einem ähnlichen Material wären solche Prozesse nicht möglich. Nur dadurch, dass die Bilder eine zweite Existenz besitzen *müssen*, wie wir schließen können, eine zweite Existenz allerdings, die unserem Blick verborgen bleibt, kann es zu jenen Bewegungen, Anzeigen, Transformationen, Schwingungen, Kraftwirkungen kommen.

Grafik und Geometrie, auf einander angewiesene Geschwister, werden in der algorithmischen Wende, die dem Bild widerfährt, als Darstellung und Vorstellung mit einander verschränkt. Das Bild ist stets ein Oberflächen-Phänomen. An der Oberfläche erscheint seine Sichtbarkeit. Nie aber sind wir am Bild nur an sich selbst interessiert, stets suchen wir nach seiner Bedeutung, nach dem, was es zeigt, nach seinem Sinn. In der Didaktik und der Illustration schon ganz.

Das wollen wir aufnehmen im Wort von der *Unterfläche*, die dem Bild als *Oberfläche* , die es immer schon war, in seiner algorithmischen Existenz neu zuwächst. Bilder besitzen nun, in algorithmischer Betrachtung, zwei Seiten: eine Oberfläche und eine Unterfläche. Die Oberfläche ist sichtbar, für den Menschen. Die Unterfläche ist bearbeitbar, vom Computer. Da das Bild beides ist, zeigen sich Bearbeitungen der Unterfläche an der Oberfläche. Die Bearbeitung geschieht durch das Programm, das die Werte seiner Parameter aus der Interaktion des Menschen mit dem Bild zieht.

Anderswo haben wir das neue Gebilde, mit dem wir es nun immer zu tun haben, als das *algorithmische Zeichen* definiert (Nake 2004).

Literatur

Rudolf Arnheim: *Anschauliches Denken*. Köln. DuMont 1977 (deutsch 1972, amerikanisch 1969)

Thomas F. Banchoff: *Beyond the Third Dimension*. Minesola: Dover Publ. Inc. 1990

Carola Giedion-Welcker: *Paul Klee*. Reinbek: Rowohlt 1961, 21. Aufl. 2003

Anja Hashagen: *Mehrdimensionale Würfel. Ansichten und Einsichten*. Diplomarbeit in Informatik, Universität Bremen, April 2006 (unveröff. Manuskript)

Marion Keiner, Thomas Kurtz und Mihai Nadin: *Manfred Mohr*. Weiningen-Zürich: Waser Verlag 1994

Paul Klee: *Das bildnerische Denken*. Hrsg. Von Jürg Spiller. Basel: Schwabe 1990

Domenico Laurenza, Mario Taddei, Edoardo Zanon: *Leonardo dreidimensional. Mit Computergrafik auf der Spur des genialen Erfinders*. Stuttgart: Belser 2005

Dominik Lengyel: Anschauliche Geometrie. In DGfGG (Hrsg.): *Positionen der Geometrieausbildung,* Tagungsband. Universität Hannover 2005. 45-52

Manfred Mohr: Erläuterung zum Programm space.color im Katalog der Ausstellung gleichen Titels im Museum für Konkrete Kunst Ingolstadt, 14.10.-11.11.2001

Manfred Mohr: Statement. http://www.emohr.com/tx110.html (Stand: 26.04.2006 a)

Manfred Mohr: **space.color**.http://www.emohr.com/www_m1/text_700_d.html (Stand: 26.04.2006 b)

Frieder Nake: *Ästhetik als Informationsverarbeitung. Grundlagen und Anwendungen der Informatik im Bereich ästhetischer Produktion und Kritik*. Wien, New York: Springer 1974

Frieder Nake: Das algorithmische Zeichen und die Maschine. In: Hansjürgen Paul, Erich Latniak (Hrsg.): *Perspektiven der Gestaltung von Arbeit und Technik. Festschrift für Peter Brödner*. München: Rainer Hampp Verlag 2004. 203-223

Frieder Nake, Susanne Grabowski: Zwei Weisen, das Computerbild zu betrachten. Ansicht des Analogen und des Digitalen. In: Martin Warnke, Wolfgang Coy, Georg Christoph Tholen (Hrsg.): *HYPERKULT II. Zur Ortsbestimmung analoger und digitaler Medien*. Bielefeld: transcript 2005. 123-149

Frieder Nake: Das doppelte Bild. In *Bildwelten des Wissens. Kunsthistorisches Jahrbuch für Bildkritik*. Bd. 3,2 (2006) 40-50

Bernard Robben: *Der Computer als Medium*. Bielefeld: transcript 2006

Heidi Schelhowe: *Das Medium aus der Maschine. Zur Metamorphose des Computers*. Frankfurt a.M.: Campus 1997

Palle Yourgrau: *Gödel, Einstein und die Folgen. Vermächtnis einer ungewöhnlichen Freundschaft*. München: C.H. Beck 2005